EXERCICE N° 2

La première partie porte sur l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

La deuxième partie porte sur l'étude de la fonction f.

La troisième partie consiste à étudier deux suites numériques associées.

1ERE PARTIE

On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; +∞[par : $g(x)=x^2-2\ln x$.

TRAVAIL À FAIRE :

1) Étudier le sens de variation de g.

2) En déduire le signe de g(x) sur]0 ; +∞[.

2EME PARTIE

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

TRAVAIL À FAIRE :

1) Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Déterminer la limite de f en +∞.

   b) Déterminer, sur]0 ; +∞[, la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y=\frac{x}{2}$.
   Montrer en particulier que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3) Étudier le sens de variation de f.
   Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).
   Préciser les coordonnées de B.

5) Montrer que l'équation f(x) = 0 a une solution unique α.
   Justifier l'encadrement : $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$.

6) Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).