OPTION A : Mathématiques

Exercice n° 1:

Partie A

La fonction g est définie sur l'intervalle $[\frac{1}{e};+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2x}{e}-1-lnx$.

1) Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de g.

2) En écrivant g sous la forme $g(x)=x \times h(x)$, déterminer la limite de g en $+\infty$.

3) Calculer $g(\frac{1}{e})$ et $g(\frac{2}{e})$.

4) Dresser le tableau des variations de g.

Partie B

La fonction g représente le chiffre d'affaires marginal d'une entreprise, en fonction du nombre de ses employés. C'est la dérivée de la fonction correspondant au chiffre d'affaires exprimé en euros.

Après avoir dérivé la fonction $x \rightarrow -xlnx$, déterminer ce chiffre d'affaires, sachant qu'il est nul pour un employé.

Exercice n° 2:

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{(n+1)}=\sqrt{u_n}$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=\ln(u_n)$.

1) a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{(n+1)}=(\frac{1}{2})v_n$. En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
En déduire celle de u_n en fonction de n.

2) Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n=v_0+v_1+.....+v_n$ et $P_n=u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$.

a. Montrer par récurrence que $P_n=e^{(S_n)}$.
b. Exprimer S_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (S_n) . En déduire la limite de la suite (P_n) .

Tournez la page SVP