DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

J. 12 1419

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES DE 2ÈME CLASSE AFFECTÉ AU TRAITEMENT DE L'INFORMATION EN QUALITÉ DE PROGRAMMEUR

ANNÉE 2013

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 3

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

- **Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

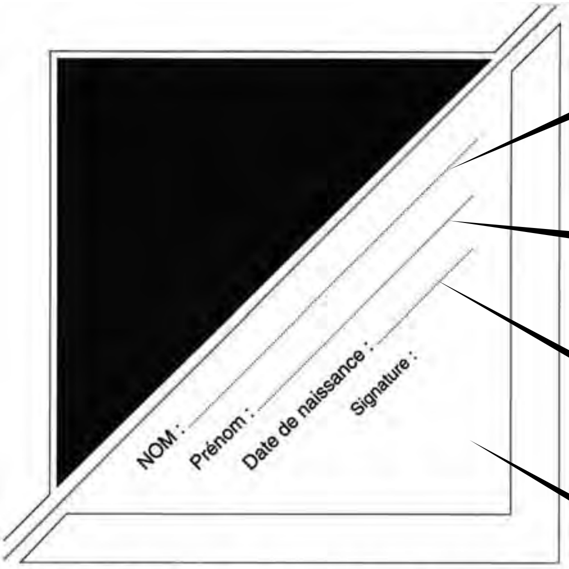
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE ET DES FINANCES

Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données



Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Signature obligatoire

Après avoir servi l'en-tête, rabattre et coller le cache

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture
Code à barres

Code centre d'examen

Vérifier la codification du centre d'examen

Concours : externe
(interne ou externe)

Pour l'emploi de : Contrôleur programmeur des Finances publiques

Épreuve n° 3

Matière : Option : Mathématiques

Date 1 4 1 2 2 0 1 2

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture
Code à barres

CENTRE D'EXAMEN

Axe de lecture
Code à barres

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors du cadre prévu à cet effet, il est interdit de signer sa copie ou de mettre un signe distinctif.

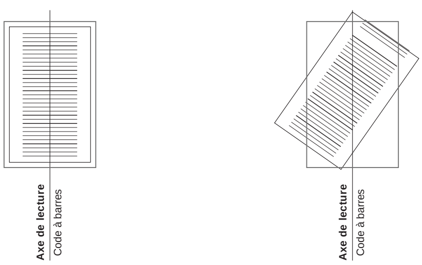
Les étiquettes d'identification ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLE

BON **MAUVAIS**



N° 140 – IMPRIMERIE NATIONALE 2002 444216 D - Décembre 2002 - 2 017473 1 ▶C3

NOTE/20

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00
25	50	75

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00
25	50	75

NOTE/20

Numéro du correcteur

Numéro de copie

Numéro de copie

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Vous traiterez l'ensemble des exercices suivants.

L'usage de la calculatrice est autorisé, à l'exclusion de celle des téléphones portables.

EXERCICE N°1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x^3-4x^2)e^{-x}$
   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=2x(-x^2+5x-4)e^{-x}$
   c) Dresser le tableau de variations de f.
   d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$
   (Unité graphique : 1 cm)

2) Pour n ∈ ℕ*, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

   a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b) On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$

   Déterminer I_2 et I_3.

   c) Soit A l'aire, exprimée en cm², du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
   Calculer A.

3) Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On définit la fonction v sur $]0;+\infty[$ par $v(x)=u\left(\frac{1}{x}\right)$

   a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a;b]$ (où $0<a<b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$

   b) On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question **1.**

   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

   c)Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

EXERCICE N°2

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I

Montrer par récurrence que : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

PARTIE II

Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3}{2}U_n-7 \quad , n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 32$$

1) Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = U_n + c$
   Déterminer le réel c tel que la suite (V_n) soit géométrique et donner ses éléments caractéristiques.

2) En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
4) Soit $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p$, $n \in \mathbb{N}$. Exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE N°3

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les événements suivants :

A : « Le jardinier a choisi le lot 1 » ;
B : « Le jardinier a choisi le lot 2 » ;
J_n : « Le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1) Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
   a) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
   b) Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
   c) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
   d) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes.
   On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2) Probabilités conditionnelles :

a) Montrer que : $P_B(J_n)=\binom{50}{n}2^{-50}$

b) En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c) On note p_n la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n est réalisé.

Établir que : $p_n=\dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0.9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE N°4

Soit D une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et soit un point A $(x_A\,;y_A)$ dans un repère orthonormal.

1) Justifier que $\vec{AH}=k\times\vec{n}$, où k est un réel et $\vec{n}$ est un vecteur normal à D et H est le projeté orthogonal de A sur D.
2) Calculer $\vec{AH}\cdot\vec{n}$ en fonction de k.
3) En utilisant le fait que H ∈ D, montrer que : $AH=\dfrac{|a\,x_A+b\,y_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4) Soit D' une droite d'équation $x-2y+2=0$.
   Quelle est la distance de A' (-1 ;2) à D' ?