SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »;*
- *les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur son ensemble de définition D_f par $f(x) = x^2 e^x$.

Partie 1

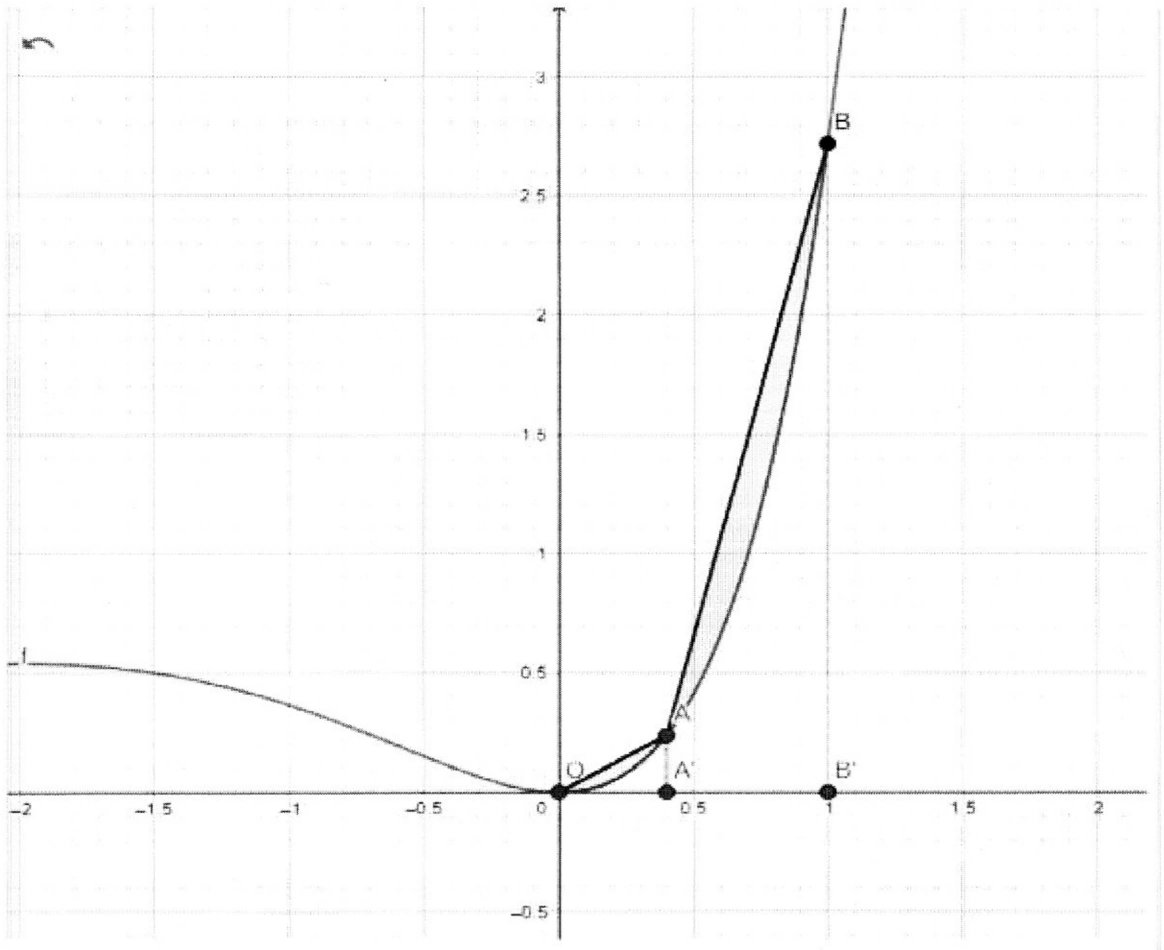
1. Déterminer D_f. et étudier les limites de f sur son ensemble de définition.
2. Calculer f'(x) et en déterminer les racines.
3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^x$, avec a, b et c réels. Calculer la dérivée F' de F, et déterminer a, b et c tels que F soit une primitive de f.
4. En déduire $\int_0^1 \mathbf{x^2 e^x dx}$.

Partie 2

Soit A un point de la courbe C_f représentative de la fonction f, d'abscisse a et d'ordonnée f(a), où $a \in [0;1]$.

Soit B le point de coordonnées (1 ; f(1)), A' le point de coordonnées (a;0) et B' le point de coordonnées (1;0) ;

Soit A l'aire délimitée par la courbe C_f, et les segments [OA] et [AB]



1. Déterminer l'aire du triangle OAA'.
2. Montrer que l'aire du quadrilatère A'ABB' est égale à $\dfrac{-a^3e^a+a^2e^a-ae+e}{2}$.
3. En déduire l'aire A en unité d'aire.

Partie 3

Dans cette partie, on cherche à déterminer le point d'abscisse a dans [0;1] tel que l'aire A est minimale.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^2\left(e^x - \dfrac{e}{x}\right) - e + 4$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
2. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $g''(x) = e^x (x^2 + 4x + 2)$.
3. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.
4. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. En utilisant les réponses aux questions des parties 1, 2 et 3, montrer qu'il existe un point d'abscisse a pour laquelle l'aire A est minimale. Donner cette valeur de a.

EXERCICE 2

Un centre aéré propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est le tir à l'arc. Une étude effectuée sur l'année scolaire précédente montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas au tir à l'arc, alors que dans le même temps, 10 nouveaux enfants s'y inscrivent. Le directeur se base sur ces résultats pour prévoir l'évolution des inscriptions pour la nouvelle année scolaire.
La première semaine de cette nouvelle année scolaire, 80 enfants se sont inscrits au tir à l'arc.
On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits au tir à l'arc, ainsi $U_0 = 80$.
Pour tout entier naturel n, on note U_n le nombre d'enfants inscrits au tir à l'arc au bout de n semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = U_n - 200$
   a. Montrer que la suite (A_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer A_n en fonction de n.
   c. Calculer la somme des dix premiers termes de la suite (A_n).
   d. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 200 - 120\text{x}0{,}95^n$.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = 6\ \text{x}0{,}95^n$.
   b. En déduire que le nombre d'inscriptions au tir à l'arc augmente toutes les semaines.

5. Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à l'activité tir à l'arc aura-t-il strictement doublé ?

EXERCICE 3

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : loi binomiale

Existe-t-il une (des) loi(s) binomiale(s) $\mathcal{B}(n;p)$, de paramètres n et p, d'espérance égale à 6 et d'écart-type égal a 0,4 ?

Partie 2 : probabilités conditionnelles

A) Un grossiste achète des boîtes de café chez deux fournisseurs. Il achète 70 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 30 % chez le fournisseur B.
5% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 10 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

événement A : "la boîte provient du fournisseur A" ;
événement B : "la boîte provient du fournisseur B" ;
événement P : "la boîte présente des traces de pesticides".

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{P}$?

3. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,935.

4. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

B) Le gérant d'un bar achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 4

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé de base B (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Soit la base B' d'origine O' et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1. La base B' est-elle une base de l'espace ? Le cas échéant, est-elle directe ?

2. Soit $\vec{t}\begin{pmatrix}m\\-1\\1\end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$, dans la base B.
   Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base B'.

3. Déterminer la (les) valeur(s) de m pour laquelle (lesquelles) les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Partie 2

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit le plan P_m par
$\forall m \in \mathbb{R} \quad (4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m+8$.

Soit Ω_0 le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$ et Δ la droite passant par Ω_0 dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que le plan P_m est bien un plan pour tout m dans $\mathbb{R}$.

2. Soit Ω_x le point de Δ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

On admettra que le projeté orthogonal H de Ω_x sur P_m a pour coordonnées :

$$H \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ \frac{(1-x)(4-m^2)}{2(m^2+4)}+1 \\ \frac{-2m(1-x)}{m^2+4}-\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Montrer que la distance de P_m à Ω_x est égale à $\frac{|x-1|}{\sqrt{2}}$.

Quelle remarque peut-on faire ?

3. Déterminer les coordonnées du (des) point(s) appartenant à Δ et centre(s) de la (les) sphère(s) de rayon 1/2 et tangente à P_m.

EXERCICE 5

Résoudre l'équation (E) d'inconnue x suivante :

(E) $\ln(x-1) + \ln(2-x) = \ln(6x)$