FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »;*
- *les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1) a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C .

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3) a) Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 < I_2 < e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A :

Un grossiste achète des boîtes de café chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : la boîte provient du fournisseur A ;
- évènement B : la boîte provient du fournisseur B ;
- évènement S : la boîte présente des traces de pesticides.

1) Traduire l'énoncé sous forme d' arbre pondéré.

2) a) Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0, 88.

3) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B :

Le gérant d'un café achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie sur N par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$

1) a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1}=2-\dfrac{5}{u_n+4}$

b) Montrer par récurrence que pour tout n, $0\leqslant u_n<1$

2) On admet que la suite (u_n) est croissante.

a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite l

b) On admet que cette limite l vérifie f(l) = l où f est la fonction associée à la suite (u_n) telle que $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Déterminer la valeur de l.

3) Soit la suite (v_n) définie sur N par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ dont on déterminera le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Retrouver alors la limite de (u_n) déterminée au 2b).

EXERCICE 4

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; –1 ; –2) et D (7 ; –1 ; 4).

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; –1 ; 3).

a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Tournez la page S.V.P.

3) Soit P_1 le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b) Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=3t+2 \end{cases}$$

c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}]$ l'équation $\cos(t)=\sin(\frac{5\Pi}{6})$.