OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie A :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires. $\frac{1}{9}$
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ». Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes. $1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ? ? $1/3$

Partie B :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre face vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dès B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ? $p_V(V)=\frac{4}{6}$
3. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ? $p(V\,2\text{e lancé})=\frac{1}{2}$

Exercice 2

Partie A :

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = a\,u_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1\ ).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle]- 1 ; 1[, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B :

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016, avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année (2015 + n). Justifier que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30$.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite h_n . Démontrer cette conjoncture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

Exercice 3

On se propose dans cet exercice, d'étudier les propriétés d'un solide de l'espace.

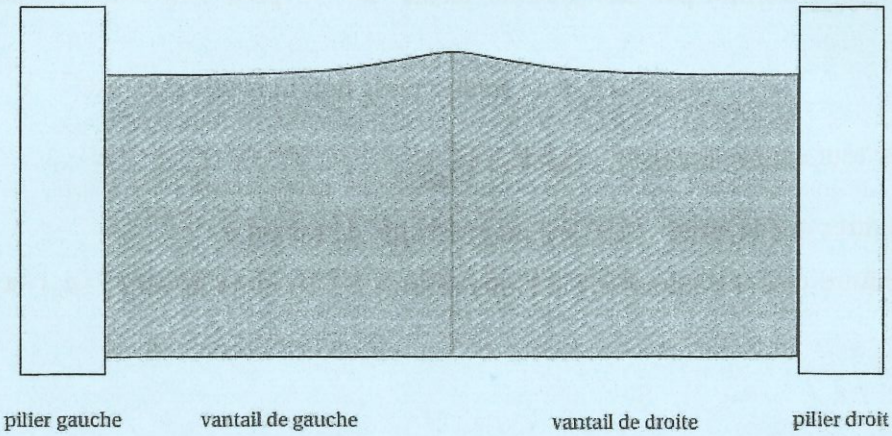
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A (3 ; 4 ; 0) ; B (0 ; 5 ; 0) ; C (0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19}; \dfrac{45}{19}; \dfrac{45}{19}\right)$. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.
3. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 4

On désire réaliser un portail de la forme suivante (chaque vantail mesure 2 m de large) :



Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x)=(x+\frac{1}{4})e^{-4x}+b$ où *b* est un nombre réel. On note *f '* la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 2].

1. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2]. $-4x e^{-4x}$
2. En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; 2]. $\overset{0}{} \searrow \overset{2}{}$
3. Déterminer le nombre *b* pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

$(x+\frac{1}{4})e^{-4x}+b = 1,5$ ...

Dans la suite la fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par

$$f(x)=(x+\frac{1}{4})e^{-4x}+\frac{5}{4}$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $F(x)=(\frac{-x}{4}-\frac{1}{8})e^{-4x}+\frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction *f*. dériver F(x)

$u = -\frac{x}{4} - \frac{1}{8}$

$u' = -\frac{1}{4}$

$v = e^{-4x}$

$v' = -4e^{-4x}$

2. En déduire l'aire en m² de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au centième près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

$$\int_0^2 f(x) - 0,05\, dx = \left[F(x) - 0,05x\right]_0^2$$