FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »;*
- *les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
On note M et N les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1;2]$, le point E est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (MN). coeff dir

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point E. Montrer qu'une équation de (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$. $f'a(x-a)+fa$

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1;2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.
a. Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de A d'amplitude 10^{-1}.

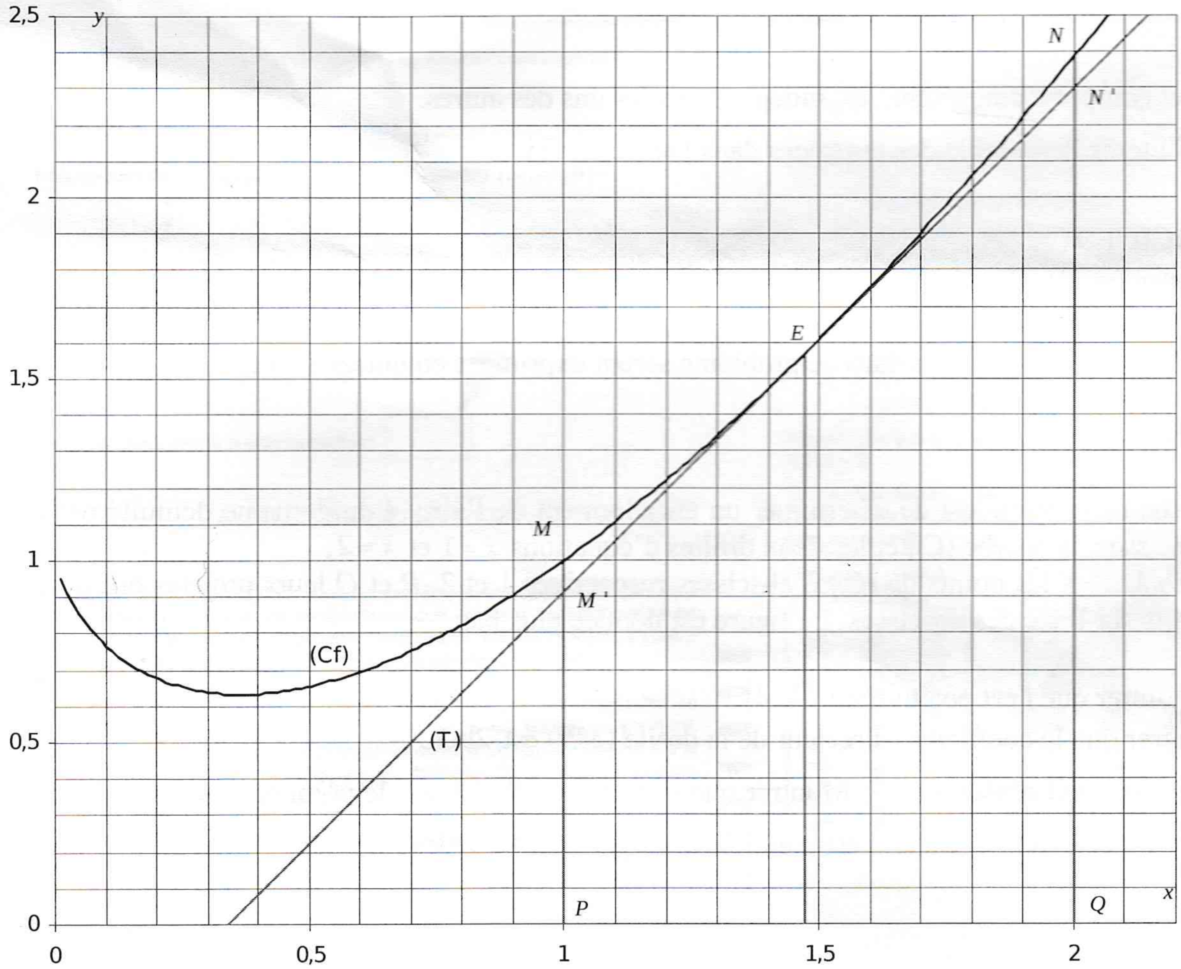
Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.

1. Soit V la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $V(x)=x^2\dfrac{\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}$

calculer la dérivée de V puis en déduire $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

2. Calculer la valeur exacte de A.



EXERCICE 2

1. Soit la suite u définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier n non nul par $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros. Emmanuel fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1, si Emmanuel est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0, sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'Emmanuel soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité qu'Emmanuel subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

b. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
Montrer que f est strictement décroissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

c. En déduire la valeur minimale à 10^{-2} qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité qu'Emmanuel subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

EXERCICE 4

Partie 1

Le symbole ln désigne le logarithme népérien et $|.|$ la valeur absolue.
Résoudre les équations suivantes :

a. $\ln (x^2) = 1$

b. $\ln |x^2-1|=1$

c. $|\ln(x^2-1)|=1$

Partie 2

Le symbole ln désigne le logarithme népérien et e^x désigne la fonction exponentielle.
Soit $P(x) = 2x^3 - 13x^2 - 10x + 21$.

1. Détermination des racines du polynôme P(x)
a. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ et les déterminer.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :
a. $2(\ln x)^3 - 13(\ln x)^2 - 10\ln x + 21 = 0$.
b. $10+13e^x-2e^{2x}=21e^{-x}$

EXERCICE 5

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Toute réponse doit être rigoureusement justifiée.
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $S(1\,;-2\,;0)$ et le plan P d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

A : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases}$ B : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}$ C : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases}$ D : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ (t réel).

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

A : $(-4\,;0\,;0)$ B : $\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ C : $\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ D : $\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ C : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ D : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

A : au point $I(1\ ;-5\ ;0)$.   B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$.

C : au cercle de centre S et de rayon 2.   D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$.