OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher. On réalise des tirages en procédant de la manière suivante : Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geqslant 2)$:
• Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1.
• Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2
2. . Montrer que pour tout n n entier naturel non nul $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}05$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n \geqslant 0{,}25$
   b. . Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l.
   d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0{,}8\, l + 0{,}05$. En déduire la valeur de l
   .

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]\ 0,+\infty\ [$ par $f(x)=1+x\ln x$ où $\ln x$ est le logarithme népérien de x.

On note C_f sa courbe représentative dans un espace orthogonal $(O;\ \vec{i},\vec{j}\ )$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

1. Le but est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

On note M et N les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.

a. Montrer que f est positive sur [1,2].

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'ascisse $4/e$.

Montrer que sur l'intervalle [1,2], le point E est l'unique point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN). On rappelle que la dérivée f' de f en x donne le coefficient directeur de la tangente à C_f en x.

d. On appelle T la tangente à C_f au point E.

Montrer qu'une équation de T est $y=(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1$

2. Soit g la fonction définie sur [1,2] par $g(x)=f(x)-(2\ln 2)x+\dfrac{4}{e}-1$

a. Montrer que pour tout x de [1,2], $g'(x)=1+\ln(\dfrac{x}{4})$

b. Étudier les variations de g sur [1,2] et en déduire la position relative de C_f et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T.

On admet que la courbe C_f reste sous la droite (MN) sur l'intervalle [1,2] et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. On cherche à calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.

On rappelle que l'aire d'un trapèze-rectangle est $\dfrac{(petite\,base+grande\,base)*hauteur}{2}$.

Calculer $\dfrac{(PM+QN)*PQ}{2}$ et $\dfrac{(PM'+QN')*PQ}{2}$.

b. Si on pose $\ln 2=0{,}69$ et $4/e=1{,}47$, donner un encadrement de A d'amplitude 10^{-1}

4. Le but est de déterminer la valeur exacte de A.

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{x=1}^{x=2} x\ln(x)\,dx$

b. En déduire la valeur exacte de A.

Exercice 3

On considère la fonction *f* définie sur [0,+∞[par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que *f* est dérivable sur [0,+∞[. Étudier le signe de sa dérivée *f'*, sa limite éventuelle en +∞ . Que pouvez-vous en conclure pour *f* sur l'intervalle ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général $(u_n)=\int_n^{n+1} f(t)\,dt$

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur [0,+∞[par $F(x)=(\ln(x+3))^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur [0,+∞[de la fonction *F* et déterminer, pour tout réel positif *x*, le nombre *F'(x)*.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $(I_n)=\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel *n*, $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$ .Calculer S_n .

La suite (S_n) est-elle convergente ?