

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

– *Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.*

– *Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.*

Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout $x > 3$ par $f(x) = \ln(2x-6)$ et on appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$

Partie I

- 1) Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 3$ et $x \rightarrow +\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
- 2) Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation.
- 3) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées de A ?
- 4) Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe C_f

Partie II

On considère la droite (D) d'équation $y=x$. Par symétrie axiale d'axe D, la courbe C_f se transforme en une courbe C_g représentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$. On admet que pour tout réel x , la fonction $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $g(x) = a + b e^x$ où a et b sont deux réels. La courbe C_g passe par le point A' image de A par la symétrie axiale d'axe D. De plus, la courbe admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de (T) par la symétrie d'axe (D).

- 1) Calculer, en justifiant, les valeurs de a et b .
- 2) Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à C_g et ayant pour abscisse 3. En déduire les coordonnées du point E' image de E par rapport à D.

- 3) Déterminer la valeur de $\int_0^3 \left(3 + \frac{1}{2} e^x\right) dx$

4) En déduire l'aire A , exprimée en unités d'aire, du domaine défini par la courbe C_g , l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E.

5) Expliquer comment on peut en déduire, sans calcul, la valeur exacte de $\int_{\frac{7}{2}}^{3+\frac{1}{2}e} f(x) dx$

Exercice 2

Soient a et b , deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0=4$ et $b_0=2$ et pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} (3a_n + b_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} (a_n + 3b_n)$$

Δ étant un axe rapporté au repère $(O; i)$, pour tout entier naturel on désigne par A_n et B_n les points de Δ d'abscisses a_n et b_n .

1) Placer A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 sur Δ .

2) Soit U_n la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = a_n + b_n$

a) Démontrer que la suite U_n est constante.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , les segments $[A_n B_n]$ ont le même milieu I dont on déterminera l'abscisse.

3) On considère la suite réelle V_n définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = b_n - a_n$.

a) Montrer que V_n est une suite géométrique. Déterminer sa limite si elle existe.

b) Que peut-on dire de la distance $A_n B_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

4) Exprimer a_n et b_n en fonction de n pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

5) Démontrer que a_n et b_n sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $2x+y-z+7=0$ et les points $A(4;1;-2)$, $B(-3;1;2)$ et $C(-1;3;1)$.

- 1) Montrer que le point B appartient au plan (P) et déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et orthogonal à (BC).
- 3) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P).
- 4) Soient R le projeté orthogonal de A sur (P) et S le projeté orthogonal de A sur (BC), déterminer les coordonnées de R et S.

Exercice 4

Une urne contient 3 boules bleues et n boules blanches (n étant un entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée.

Partie I

On tire successivement 3 boules avec remise et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

- 1) Donner la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer $E(X)$ et déterminer n pour que l'espérance mathématique soit égale à 1,5.

Partie II

Pour la suite de l'exercice on considère que $n=2$. On effectue un tirage successif et sans remise des 5 boules de l'urne. On désigne par Z la variable aléatoire égale au rang de la première boule bleue tirée.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de Z .
- 2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z .