

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice n° 1 :

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$

1. Étudier les variations de la fonction g et en déduire son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0;1]$.
3.
 - a. Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.
 - b. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan déterminé par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice n° 2 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{array} \right.$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2
 - b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas nul et on pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$
 - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n
 - c. Vers quel nombre tend la suite (u_n)

Exercice n° 3 :

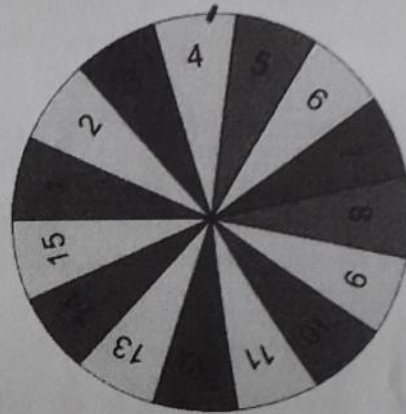
L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.

On considère quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :
 $A(-1; 2; 1)$; $B(1; -6; -1)$; $C(2; 2; 2)$; $I(0; 1; -1)$

1. Calculer les coordonnées \vec{AB} et \vec{AC} .
Justifier que les 3 points A, B et C définissent un plan P.
2. Soit \vec{u} le vecteur de coordonnées $(1; 1; -3)$. Démontrer que \vec{u} est orthogonal à \vec{AB} et à \vec{AC} . Déterminer une équation cartésienne du plan P.

Exercice n° 4 :

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15. Ces secteurs sont de différentes couleurs (secteurs 1 et 10 rouges ; secteurs 2, 4, 6, 9, 11, 13 et 15 jaunes ; secteurs 5 et 8 bleus, secteurs 3, 7, 12 et 14 verts). On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.



L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}.$$

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- E « le numéro est multiple de 5 »
- F « le numéro n'est pas multiple de 5 »
- G « le numéro est pair et inférieur à 11 »
- d. $E \cap G$; $E \cup G$.

2. Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge. Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue. Les secteurs 3, 7, 12 et 14 sont de couleur verte. Les autres secteurs sont de couleur jaune. La variable aléatoire X, qui associe à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0, correspond au gain du joueur en euros.

- Donner la loi de probabilité de X.
- Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

3. Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue. Ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros. B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.

Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :

- La roue s'arrête sur un secteur rouge et A parie que le numéro est 15.
- La roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3.
- La roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8.
- La roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas 14.