

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :

- Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
- Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

On considère deux urnes U_1 et U_2 .
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher. On réalise des tirages en procédant de la manière suivante : Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1 .

Étape n ($n \geq 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .

On note A l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $\mathcal{P}_1 = 1$.

1. Calculer \mathcal{P}_2
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul $\mathcal{P}_{n+1} = 0,8 p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer \mathcal{P}_3
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $\mathcal{P}_n \geq 0,25$
b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l .
d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0,8l + 0,05$. En déduire la valeur de l



SHOT ON MI 8
AI DUAL CAMERA

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + x/\ln x$ où $\ln x$ est le logarithme népérien de x .

On note C_f sa courbe représentative dans un espace orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

1. Le but est de déterminer un encadrement de l'aire A du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

On note M et N les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.

a. Montrer que f est positive sur $[1,2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $4/e$.

Montrer que sur l'intervalle $[1,2]$, le point E est l'unique point de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN) . On rappelle que la dérivée f' de f en x donne le coefficient directeur de la tangente à C_f en x .

d. On appelle T la tangente à C_f au point E .

Montrer qu'une équation de T est $y = (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$

2. Soit g la fonction définie sur $[1,2]$ par $g(x) = f(x) - (2\ln 2)x + \frac{4}{e} - 1$

a. Montrer que pour tout x de $[1,2]$, $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

b. Étudier les variations de g sur $[1,2]$ et en déduire la position relative de C_f et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T .

On admet que la courbe C_f reste sous la droite $(M'N')$ sur l'intervalle $[1,2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. On cherche à calculer les aires des trapèzes $M'N'QP$ et $M'N'Q'P'$.

On rappelle que l'aire d'un trapèze-rectangle est $\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) * \text{hauteur}}{2}$.

Calculer $\frac{(PM' + QN') * PQ}{2}$ et $\frac{(PM' + QN') * PQ}{2}$.

b. Si on pose $\ln 2 = 0,69$ et $4/e = 1,47$, donner un encadrement de A d'amplitude 10^{-1}

4. Le but est de déterminer la valeur exacte de A .



SHOT ON MI 8
AI DUAL CAMERA

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{x=1}^{x=2} x \ln(x) dx$

b. En déduire la valeur exacte de A.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Étudier le signe de sa dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$. Que pouvez-vous en conclure pour f sur l'intervalle ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son terme général $(u_n) = \int_n^{n+1} f(t) dt$

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n que pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$

a. Justifier la dérivabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n , $(I_n) = \int_0^n f(x) dx$. Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. Calculer S_n .

La suite (S_n) est-elle convergente ?



SHOT ON MI 8
AI DUAL CAMERA