

CORRIGÉ

Merci Dnaref84

Membre du site [devenez-fonctionnaire.Fr](http://devenez-fonctionnaire.fr)

CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNEE 2020

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2 :
MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1 :

Les parties A, B et C sont indépendantes.
In détermine toujours le logarithme népérien.

Partie A :

Soit $f(x)$ la fonction définie telle que $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$

a) Déterminez D_f correspondant à l'ensemble de définition de f .

La fonction logarithme népérien est définie si et seulement si :

$$\frac{1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

On en déduit que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; 2[$.

b) Prouvez que f est croissante sur D_f

Il existe 2 méthodes pour répondre à cette question :

En considérant la fonction f comme la composée de 3 fonctions :

En effet, on peut écrire la fonction f sous la forme $f = w \circ v \circ u$ avec :

$$u(x) = 2 - x$$

$$v(x) = \frac{1}{x}$$

$$w(x) = \ln(x)$$

Merci Dnaref84

Membre du site devenez-fonctionnaire.Fr

La fonction u est une fonction affine dont le coefficient directeur est négatif, ainsi u est décroissante sur \mathbb{R} et donc sur $D_f =]-\infty; 2[$.

Par ailleurs, $x \in]-\infty; 2[\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow u(x) \in]0; +\infty[$.

La fonction v (fonction inverse) est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Enfin, la fonction w (fonction logarithme népérien) est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

En conclusion, f étant la composée de 2 fonctions décroissantes (u et v) et d'une fonction croissante (w), f est croissante sur l'intervalle $D_f =]-\infty; 2[$.

En étudiant le signe de la dérivée de f :

On remarque que pour tout $x \in]-\infty; 2[$, $\frac{1}{2-x} > 0$.

Par conséquent, f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{1}{2-x}$ qui est strictement positive et dérivable sur $D_f =]-\infty; 2[$.

Ainsi, f est dérivable sur l'intervalle D_f et en utilisant la formule $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ on obtient :

$$f'(x) = \frac{\frac{-(-1)}{(2-x)^2}}{\frac{1}{2-x}} = \frac{1}{(2-x)^2} \times (2-x) = \frac{1}{2-x} > 0 \text{ sur l'intervalle } D_f$$

En conclusion, f est croissante sur l'intervalle $D_f =]-\infty; 2[$.

c) Démontrez que l'image par f de l'intervalle $I = [-2; 0]$ est incluse dans I

D'après la question précédente, f est croissante sur l'intervalle $D_f =]-\infty; 2[$, donc aussi sur l'intervalle $I = [-2; 0]$.

Or $f(-2) = \ln\left(\frac{1}{2-(-2)}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(1) - \ln(4) = -\ln(4) \approx -1,39 \in [-2; 0]$
 et $f(0) = \ln\left(\frac{1}{2-0}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2) \approx -0,69 \in [-2; 0]$

On en déduit alors que l'image par f de l'intervalle $I = [-2; 0]$ est bien incluse dans I .

Partie B :

Déterminez :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Y^x}{x^Y}$ avec $Y = x^x$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Y^x}{x^Y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^2}}{x^{(x^x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x^2 - x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^2 - x^x)\ln(x)}$

Or : $(x^2 - x^x)\ln(x) = x^2\ln(x) - x^x\ln(x) = x^2\ln(x) \left(1 - \frac{x^x\ln(x)}{x^2\ln(x)}\right) = x^2\ln(x)(1 - x^{x-2})$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2\ln(x) = +\infty$ (Par produit de limites)

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x-2} = +\infty$ (Car $x^{x-2} = e^{(x-2)\ln(x)}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)\ln(x) = +\infty$ (Par produit de limites). Ainsi en posant $X = (x - 2)\ln(x)$, on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$)

En conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{x-2}) = 1 - (+\infty) = -\infty$ (Par somme de limites)

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2\ln(x)(1 - x^{x-2}) = -\infty$ (Par produit de limites)

Et par conséquent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^2 - x^x)\ln(x)} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

b) Une primitive de $\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x - \sin(x)}$

On sait, d'après les formules trigonométriques, que pour tout réel x , on a : $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.
 Ainsi :

$$\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x - \sin(x)} = \frac{1 - \cos(2 \times \frac{x}{2})}{2(x - \sin(x))} = \frac{1 - \cos(x)}{2(x - \sin(x))}$$

On remarque ainsi que l'expression est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - \sin(x)$ et $u'(x) = 1 - \cos(x)$

On en déduit alors qu'une primitive de $\frac{u'}{u}$ est donnée par $\ln|u| + C$ avec C une constante réelle.

Ainsi une primitive de $\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x - \sin(x)}$ est $\frac{1}{2} \ln|x - \sin(x)| + C$.

c) Une primitive de $\ln(x + 1)$

En posant $u(x) = x + 1$, l'expression est sous la forme $\ln(u)$.

Or une primitive de $\ln(u)$ est donnée par : $u \times \ln(u) - u + C$ avec C une constante réelle.

En effet, en posant : $v(u) = \ln(u)$ et $w'(u) = 1$, par intégration par parties, on obtient :

$$\int v(u)w'(u)du = v(u) \times w(u) - \int v'(u)w(u)du = u \times \ln(u) - \int \frac{1}{u} \times u du$$

$$= u \times \ln(u) - \int 1 \, du = u \times \ln(u) - u$$

On en déduit qu'une primitive de $\ln(x+1)$ est donnée par $(x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C$, soit encore $(x+1)\ln(x+1) - x - 1 + C$, avec C une constante réelle.

Partie C :

Soit $f(x) = (ax+b)e^{-x+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, \exp définissant la fonction exponentielle et f définie sur $[0; 4]$

a) Calculez f' de f (f' dérivée de f)

f est bien dérivable sur l'intervalle $[0; 4]$ comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0; 4]$.

En utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = ax+b$ et $v(x) = e^{-x+1}$, on obtient :

$$f'(x) = a \times e^{-x+1} + (ax+b) \times (-e^{-x+1}) = ae^{-x+1} - axe^{-x+1} - be^{-x+1}$$

$$f'(x) = (a - b - ax)e^{-x+1}$$

b) Sachant que $f'(1) = 1$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, déterminez a et b

On a :

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow (a - b - a \times 1)e^{-1+1} = 1 \Leftrightarrow -be^0 = 1 \Leftrightarrow -b = 1 \Leftrightarrow b = -1$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a - b - a \times \frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}a - (-1)\right)e^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

On en déduit alors que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$

c) Étudiez le sens de variation de f

En posant $a = 2$ et $b = -1$, d'après l'expression $f'(x)$ établie lors de la question a) on obtient pour tout $x \in [0; 4]$:

$$f'(x) = (2 - (-1) - 2x)e^{-x+1} = (-2x + 3)e^{-x+1}$$

Comme pour tout $x \in [0; 4]$, $e^{-x+1} > 0$, on en déduit que f' est du signe de $-2x + 3$ qui s'annule lorsque : $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Le coefficient directeur étant négatif, on en déduit alors que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Ainsi, f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{3}{2}\right]$, strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$

et s'annule en $x = \frac{3}{2}$.

d) Tracez la courbe C de f

e) Tracez T_1 et T_2 les deux tangentes connues grâce à b)

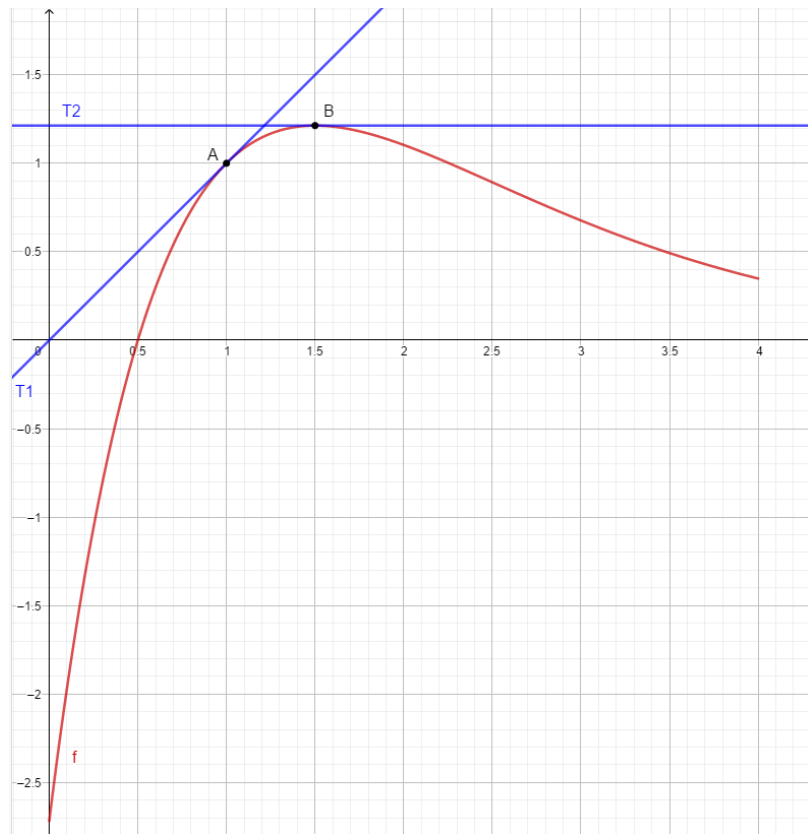
Comme on a $f'(1) = 1$, l'équation de la droite T_1 tangente en $x = 1$ est de la forme $y = x + b$.

Or $f(1) = (2 \times 1 - 1)e^{-1+1} = e^0 = 1$, ainsi : $1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1 - 1 = 0$

Par conséquent, la tangente T_1 a pour équation $y = x$.

De plus, comme $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, la courbe C admet une tangente horizontale T_2 d'équation $y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2} - 1\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{e} \approx 1,21$ (Arrondi au centième près) en $x = \frac{3}{2}$.

Voici le tracé de la courbe C de la fonction f ainsi que le tracé des 2 tangentes T_1 et T_2 d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{2\sqrt{e}}{e}$:



f) Déduisez graphiquement la solution $f(x) = 0$

D'après la lecture graphique de la courbe C , on en déduit que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = \frac{1}{2}$.

g) Résolvez l'équation $f(x) = 0$

On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)e^{-x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ (En divisant par } e^{-x+1} > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ce qui corrobore la conjecture établie à la question précédente.

Exercice n° 2 :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies telles que :

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 2u_{n+1} - v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_n = 2v_{n+1} - u_{n+1} \end{cases}$$

1) Calculez u_1 , u_2 , v_1 et v_2 .

Dans un premier temps, réécrivons autrement les 2 suites (u_n) et (v_n) .

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 2u_{n+1} - v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ 2u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ d'une part et}$$

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_n = 2v_{n+1} - u_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ 2v_{n+1} = v_n + u_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ 2v_{n+1} = v_n + \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ 2v_{n+1} = \frac{2v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ 2v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} \text{ d'autre part.}$$

Ainsi :

$$u_1 = u_{0+1} = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$v_1 = v_{0+1} = \frac{u_0 + 3v_0}{4} = \frac{3+3 \times 4}{4} = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{14+15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8} = 3,625$$

$$v_2 = v_{1+1} = \frac{u_1 + 3v_1}{4} = \frac{\frac{7}{2} + 3 \times \frac{15}{4}}{4} = \frac{\frac{14+45}{4}}{4} = \frac{\frac{59}{4}}{4} = \frac{59}{16} = 3,6875$$

2) Soit $w_n = v_n - u_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrez que w_n est une suite géométrique et déterminez sa raison

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + 3v_n - 2(u_n + v_n)}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 2u_n - 2v_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} \\ &= \frac{w_n}{4} = \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

Merci Dnaref84

Membre du site devenez fonctionnaire Fr

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ (et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$)

b) Déterminez la limite de w_n

Comme la suite (w_n) est géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = w_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Puisque $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

3) Étudiez $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$

Que peut-on en déduire ?

D'après la question 2b), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > u_n$

On en déduit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > \frac{u_n + u_n}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} < \frac{v_n + 3v_n}{4} = \frac{4v_n}{4} = v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n < 0$$

Finalement, la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

On en déduit alors que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4) Soit t_n la suite constante définie telle que $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

Déterminez la limite de u_n et v_n

Pour rappel, une suite t_n est dite **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_{n+1} = t_n$

Puisque la suite (t_n) est constante d'après l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = t_0 \Leftrightarrow \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2 \times 4}{3} = \frac{11}{3}$$

Or, comme les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** d'après la question précédente, elles sont **convergentes** et ont la même limite.

On note ℓ la limite commune de ces 2 limites.

$$\text{On en déduit ainsi, lorsque } n \text{ tend vers } +\infty : \frac{\ell + 2\ell}{3} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{3\ell}{3} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow \ell = \frac{11}{3}$$

Et par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{11}{3}$$

Exercice n° 3 :

Dans un concours administratif, trois options pour l'écrit sont possibles : mathématiques, français et comptabilité.

On sait que 37 % des candidats ont choisi les mathématiques et que 25 % ont pris le français.

Parmi tous les candidats, 21 % des candidats ont choisi les mathématiques et ont obtenu leur concours.

Parmi tous les candidats, 32,5 % des candidats ont choisi la comptabilité et ont obtenu le concours.

Enfin, parmi les candidats ayant opté pour le français, 27,5% ont échoué.

Soit les événements suivants :

M = Le candidat a choisi les mathématiques

C = Le candidat a choisi la comptabilité

F = Le candidat a choisi le français

R = Le candidat a réussi le concours

Tous les résultats seront arrondis au millième.

1) Convertissez les informations numériques présentées sous forme de pourcentage en termes de probabilité, donc sous la forme $P(\text{événement}) = \dots$

D'après les données de l'énoncé, on a :

$$37 \% \text{ des candidats qui ont choisi les mathématiques, donc : } P(M) = \frac{37}{100} = 0,37$$

$$25 \% \text{ des candidats qui ont choisi le français, donc : } P(F) = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$21 \% \text{ des candidats qui ont choisi les mathématiques et qui ont obtenu le concours, donc : } P(M \cap R) = \frac{21}{100} = 0,21$$

$$32,5 \% \text{ des candidats qui ont choisi la comptabilité et qui ont obtenu le concours, donc : } P(C \cap R) = \frac{32,5}{100} = 0,325$$

$$\text{Enfin, parmi les candidats ayant choisi le français, 27,5\% ont échoué le concours, donc : } P_F(\bar{R}) = \frac{27,5}{100} = 0,275$$

On interroge au hasard un candidat.

2)

a) Calculez la probabilité que ce candidat ait choisi la comptabilité $P(C)$

Comme les événements M, C et F forment une partition de l'univers Ω , on a :

$$P(M) + P(C) + P(F) = 1$$

Ainsi, la probabilité que le candidat ait choisi la comptabilité est donnée par :

$$P(C) = 1 - P(M) - P(F) = 1 - 0,37 - 0,25 = 0,38$$

b) Calculez la probabilité que ce candidat ait choisi le français et en plus qu'il ait eu le concours. (Soit $P(F \cap R)$)

La probabilité que ce candidat ait choisi le français et en plus qu'il ait eu le concours est donnée par :

$$\begin{aligned} P(F \cap R) &= P(F) \times P_F(R) = P(F) \times (1 - P_F(\bar{R})) = 0,25 \times (1 - 0,275) = 0,25 \times 0,725 \\ &= 0,18125 \approx 0,181 \text{ (Arrondi au millième près)} \end{aligned}$$

3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait échoué en ayant pris le français. (Soit $P(F \cap \bar{R})$)

La probabilité que ce candidat ait échoué en ayant pris le français est donnée par :

$$P(F \cap \bar{R}) = P(F) \times P_F(\bar{R}) = 0,25 \times 0,275 = 0,06875 \approx 0,069 \text{ (Arrondi au millième près)}$$

4) Le candidat n'a pas eu son concours et avait pourtant choisi les mathématiques. Quelle était sa probabilité (Soit $P_M(\bar{R})$) ?

La probabilité que le candidat n'ait pas eu son concours et ait pourtant choisi les mathématiques est donnée par :

$$\begin{aligned} P_M(\bar{R}) &= \frac{P(M \cap \bar{R})}{P(M)} = \frac{P(M) - P(M \cap R)}{P(M)} \text{ (Car } R \text{ et } \bar{R} \text{ forment aussi une partition de l'univers } \Omega) \\ &= \frac{0,37 - 0,21}{0,37} = \frac{0,16}{0,37} = \frac{16}{37} \approx 0,432 \text{ (Arrondi au millième près)} \end{aligned}$$

5) Déterminez le pourcentage de réussite au concours (Soit $P(R)$)

Les événements M, C et F forment une partition de l'univers Ω . Donc, d'après la formule des probabilités totales, la probabilité de réussite au concours est donnée par :

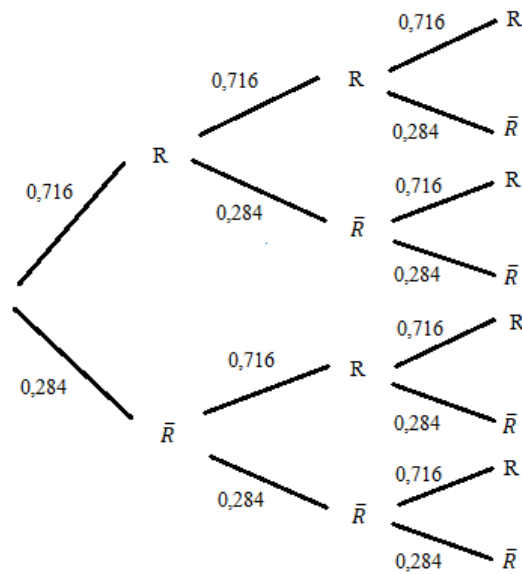
$$P(R) = P(M \cap R) + P(C \cap R) + P(F \cap R) = 0,21 + 0,325 + 0,18125 = 0,71625 \approx 0,716 \text{ (Arrondi au millième près)}$$

Par conséquent, le pourcentage de réussite au concours pour les candidats est d'environ $0,716 \times 100 = 71,6 \%$ (Arrondi au millième près)

6) On répète de façon indépendante, trois tirages successifs d'un candidat. On interroge le candidat sur sa réussite ou son échec éventuel.

a) Construisez l'arbre pondéré

On obtient l'arbre pondéré suivant :



b) Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux ait obtenu le concours ?

L'événement « Au moins un candidat sur les trois a obtenu le concours » est l'événement contraire de « Les trois candidats ont échoué au concours ».

Puisque les tirages sont indépendants, la probabilité que « Les trois candidats aient échoué au concours » est de $(1 - P(R))^3 = (1 - 0,71625)^3 = (0,28375)^3$

Ainsi, la probabilité qu'au moins un d'entre eux ait obtenu le concours est égale à : $1 - (0,28375)^3 \approx 0,977$ (Arrondi au millièmes près)

c) Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux l'aient obtenu ?

La probabilité qu'exactement deux candidats aient obtenu le concours est égale à :

$\binom{3}{2} \times (P(R))^2 \times (1 - P(R))^{3-2}$ (D'après la formule de la loi binomiale)
 $= 3 \times (0,71625)^2 \times (1 - 0,71625) = 3 \times (0,71625)^2 \times 0,28375 \approx 0,437$ (Arrondi au millièmes près)

d) Enfin, quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous lauréats ?

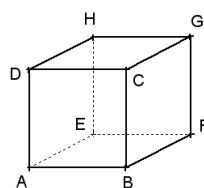
La probabilité pour que les candidats soient tous lauréats est égale à : $(P(R))^3 = (0,71625)^3 \approx 0,367$ (Arrondi au millièmes près)

Exercice n° 4 :

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A :

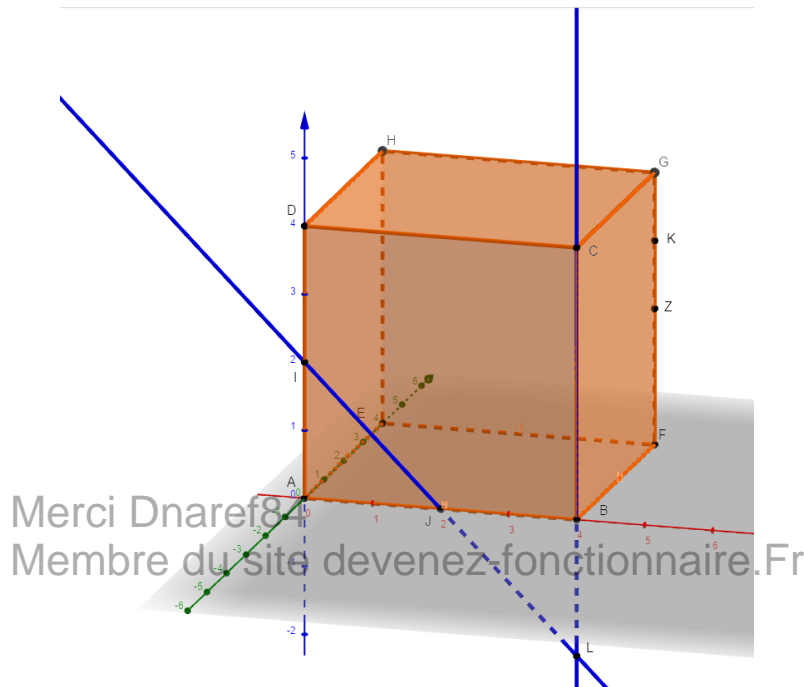
Soit le cube suivant :



De plus, I et J sont deux points tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Enfin K est le milieu de $[GZ]$ sachant que Z est le milieu de $[GF]$.

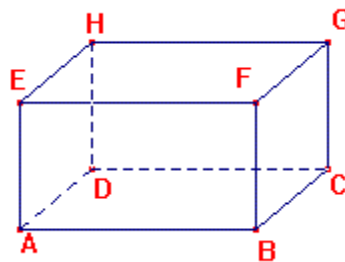
- a) Reproduisez la figure en incluant tous les points de A à K, on prendra comme échelle $[AB] = 4 \text{ cm}$
b) Soit $L = (IJ) \cap (CB)$, tracez le point L

Tout d'abord, d'après les relations vectorielles $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on en déduit que le point I est le milieu du segment $[AD]$ et que le point J est le milieu du segment $[AB]$.
Voici la figure du cube ABCDEFGH incluant les points I à L :



Partie B :

Soit le parallélépipède suivant :



Et I milieu de $[BF]$.

- a) Les vecteurs \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CF} et \overrightarrow{DG} sont-ils coplanaires ? Justifiez.

Tout d'abord quelques rappels :

On dit que :

Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

\Leftrightarrow On peut représenter ces trois vecteurs dans un même plan

\Leftrightarrow Il existe 4 points A, B, C et D d'un même plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

\Leftrightarrow L'un des vecteurs peut s'exprimer en fonction des 2 autres, à savoir qu'il existe 2 nombres réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Ici, comme $\vec{DG} = \vec{AF} = \vec{AC} + \vec{CF}$ (D'après la relation de Chasles), en posant $a = b = 1$, on en déduit immédiatement que les vecteurs \vec{AC} , \vec{CF} et \vec{DG} sont coplanaires.

b) Les vecteurs \vec{AI} , \vec{DF} et \vec{HE} sont-ils coplanaires ? Justifiez.

On se place tout d'abord dans un repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

De ce repère, on en déduit alors les coordonnées des points A, D, E, F, H et I :

$A(0; 0; 0)$

$D(0; 1; 0)$

$E(0; 0; 1)$

$F(1; 0; 1)$

$H(0; 1; 1)$

$I(1; 0; \frac{1}{2})$ (Car I est le milieu du segment $[BF]$)

Calculons alors les coordonnées des vecteurs \vec{AI} , \vec{DF} et \vec{HE} :

$$\vec{AI}(x_I - x_A; y_I - y_A; z_I - z_A) \Leftrightarrow \vec{AI}(1 - 0; 0 - 0; \frac{1}{2} - 0) \Leftrightarrow \vec{AI}(1; 0; \frac{1}{2})$$

$$\vec{DF}(x_F - x_D; y_F - y_D; z_F - z_D) \Leftrightarrow \vec{DF}(1 - 0; 0 - 1; 1 - 0) \Leftrightarrow \vec{DF}(1; -1; 1)$$

$$\vec{HE}(x_E - x_H; y_E - y_H; z_E - z_H) \Leftrightarrow \vec{HE}(0 - 0; 0 - 1; 1 - 1) \Leftrightarrow \vec{HE}(0; -1; 0)$$

On remarque que les vecteurs \vec{DF} et \vec{HE} ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

On cherche alors 2 nombres réels a et b tels que : $\vec{AI} = a\vec{DF} + b\vec{HE}$. Soit encore le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = a \times 1 + b \times 0 \\ 0 = a \times (-1) + b \times (-1) \\ \frac{1}{2} = a \times 1 + b \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -a - b = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution, par conséquent on en déduit que les vecteurs \vec{AI} , \vec{DF} et \vec{HE} ne sont pas coplanaires.

Exercice n° 5 :

Résolvez dans \mathbb{R} :

$$1) 1 - x > \sqrt{x^2 + x}$$

Tout d'abord, il faut chercher le domaine de définition de cette inéquation.

En effet, on ne pourra élever chacun des membres au carré que si et seulement si ces membres sont bien positifs.

$$\text{D'une part, on a : } x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 1) \geq 0$$

En réalisant un tableau de signes, on obtient :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$		$-$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi : $x(x+1) \geq 0$ sur l'intervalle $]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$

D'autre part, il faut que : $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ c'est-à-dire sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ (Car le membre de droite est positif)

Par conséquent, le domaine de définition de l'inéquation est l'intersection de ces 2 intervalles, à savoir : $]-\infty; -1] \cup [0; 1[$.

Pour $x \in]-\infty; -1] \cup [0; 1[$, on a donc :

$$1-x > \sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 > x^2+x \text{ (En élevant chacun des membres au carré)}$$

$$\Leftrightarrow 1-2x+x^2 > x^2+x$$

$$\Leftrightarrow 1-2x+x^2-x^2-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

On en conclut alors que l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]-\infty; -1] \cup [0; \frac{1}{3}[$.

$$2) |x-1| < 1-2|x-3|$$

Tout d'abord, on établit un tableau de signes pour chacun des 2 membres de l'inéquation. On a :

Merci Dnaref84
Membre du site devenez-fonctionnaire.Fr

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$		0	$+$
$ x-1 $	$-x+1$	0	$x-1$	$x-1$
$ x-3 $	$-x+3$		$-x+3$	0
$-2 x-3 $	$2x-6$		$2x-6$	0
$1-2 x-3 $	$2x-5$		$2x-5$	0

Par conséquent, on obtient 3 inéquations à résoudre sur 3 intervalles différents :

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, on a : $-x+1 < 2x-5 \Leftrightarrow 2x+x > 1+5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$

Ce qui est impossible sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.

Sur l'intervalle $[1; 3]$, on a : $x-1 < 2x-5 \Leftrightarrow 2x-x > -1+5 \Leftrightarrow x > 4$

Ce qui est impossible sur l'intervalle $[1; 3]$.

Enfin, sur l'intervalle $]3; +\infty[$, on a : $x-1 < -2x+7 \Leftrightarrow x+2x < 7+1 \Leftrightarrow 3x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3}$

Ce qui est impossible sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

On en conclut alors que l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S = \emptyset$.

$$3) \ln(x^2 + x - 2) > \ln\left(-x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}\right) \text{ (ln étant le logarithme népérien)}$$

Tout d'abord, on doit **déterminer l'ensemble de définition** des 2 membres de l'inéquation.

Membre de gauche :

$\ln(x^2 + x - 2)$ est défini pour $x^2 + x - 2 > 0$

On calcule son discriminant Δ . On obtient :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0. \text{ Donc deux racines réelles qui sont :}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines et de $-a = -1 < 0$ à l'intérieur.

Ainsi $\ln(x^2 + x - 2)$ est défini sur l'intervalle $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

Membre de droite :

$\ln\left(-x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}\right)$ est défini pour $-x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8} > 0$

On calcule son discriminant Δ . On obtient :

$$\Delta = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{16} - \frac{4}{8} = \frac{9}{16} - \frac{8}{16} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 > 0. \text{ Donc deux racines réelles qui sont :}$$

$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}}}{-2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{-2} = \frac{\frac{4}{4}}{-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}}}{-2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{-2} = \frac{\frac{2}{4}}{-2} = \frac{\frac{1}{2}}{-2} = -\frac{1}{4}$$

Le polynôme est du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines et de $-a = 1 > 0$ à l'intérieur.

Ainsi $\ln\left(-x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}\right)$ est défini sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2} \right]$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de cette inéquation est l'intersection de ces 2 intervalles. Or ces 2 intervalles étant disjoints, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S = \emptyset$. (Ces 2 fonctions n'ont aucun point en commun)

$$4) \text{ Démontrez que pour tout } x, y \text{ tels que } x + y > 0 \text{ on a : } \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$$

On a pour tous réels x, y :

$$(x - y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 4xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4xy \leq (x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4xy}{x+y} \leq \frac{(x+y)^2}{x+y} \text{ (En divisant des 2 côtés par } x + y > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4xy}{x+y} \leq x + y$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4} \text{ (En divisant des 2 côtés par } 4 > 0 \text{)}$$

$$5) \text{ Sachant que pour tout } x \in [I; J], \text{ on a : } 2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$$

Trouvez I et J (I et $J \in \mathbb{N}$)

On cherche I et $J \in \mathbb{N}$ tels que :

$$2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 - 3x + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 \leq 0$$

On calcule son discriminant Δ . On obtient :

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$. Donc deux racines réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{4} = \frac{8+4}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{4} = \frac{8-4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Le polynôme est du signe de $a = 2 > 0$ à l'extérieur des racines et de $-a = -2 < 0$ à l'intérieur.

Ainsi l'inéquation $2x^2 - 8x + 6 \leq 0$ est défini sur l'intervalle $[1; 3]$.

Par conséquent, en posant $I = 1$ et $J = 3$, on a bien trouvé I et $J \in \mathbb{N}$ tels que :

$$2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$$

FIN DU CORRIGÉ

Merci Dnaref84

Membre du site devenez-fonctionnaire.Fr