

CORRIGÉ

CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR DES FINANCES
PUBLIQUES

ANNEE 2018

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°2 :
MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1 :

Soit 8 points de l'espace orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ définis comme suit :

$$A(\alpha_1; \alpha_1; \alpha_1)$$

$$B(\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1; \alpha_1)$$

$$C(\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1)$$

$$D(\alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1)$$

$$E(\alpha_1; \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$F(\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$G(\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$H(\alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2)$$

Avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$; α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{HF} sont orthogonaux

On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{HF} . On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= (x_G - x_E; y_G - y_E; z_G - z_E) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= (\alpha_2; \alpha_2; 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HF} &= (x_F - x_H; y_F - y_H; z_F - z_H) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= (\alpha_2; -\alpha_2; 0)\end{aligned}$$

Puis on calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs. On a ainsi :

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF} = (\alpha_2; \alpha_2; 0) \cdot (\alpha_2; -\alpha_2; 0) = \alpha_2 \times \alpha_2 + \alpha_2 \times (-\alpha_2) + 0 \times 0 = \alpha_2^2 - \alpha_2^2 + 0 = 0$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{HF} sont orthogonaux.

2) Montrez que \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{HG} sont égaux

On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{HG} . On a :

$$\overrightarrow{EF} = (x_F - x_E; y_F - y_E; z_F - z_E) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_2; 0; 0)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HG} &= (x_G - x_H; y_G - y_H; z_G - z_H) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= (\alpha_2; 0; 0)\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{HG} sont égaux.

3) Que pouvez-vous en déduire à ce stade de la figure formée par EFGH ?

D'après la question précédente, on sait que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Donc le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

De plus, d'après la question 1, les vecteurs \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{HF} sont orthogonaux. Donc les diagonales (EF) et (HG) du parallélogramme sont perpendiculaires.

Ainsi le quadrilatère EFGH est un losange.

4) Soit I le milieu de [EG]. Montrez que $I \in (HF)$

On calcule les coordonnées du point I milieu de [EG]. On a :

$$I = \left(\frac{x_E + x_G}{2}; \frac{y_E + y_G}{2}; \frac{z_E + z_G}{2} \right) = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2}{2} \right) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}; \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}; \alpha_1 + \alpha_2 \right)$$

On calcule ensuite les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{HI} et \overrightarrow{HF} . On a :

$$\overrightarrow{HF} = (\alpha_2; -\alpha_2; 0) \text{ (D'après la question 1)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} &= (x_I - x_H; y_I - y_H; z_I - z_H) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1; \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_2}{2}; 0 \right) \end{aligned}$$

On remarque que $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{HF}$ donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{HI} et \overrightarrow{HF} sont colinéaires avec un point commun H. Par conséquent, les points H, I et F sont alignés et $I \in (HF)$.

5) Montrez que $\|\overrightarrow{IH}\|$ et $\|\overrightarrow{IE}\|$ sont égaux

On calcule tout d'abord la norme $\|\overrightarrow{IH}\|$. On a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{IH}\| &= \|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{(x_I - x_H)^2 + (y_I - y_H)^2 + (z_I - z_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_2^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{2}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On calcule ensuite les coordonnées du vecteur \overrightarrow{IE} . On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IE} &= (x_E - x_I; y_E - y_I; z_E - z_I) = \left(\alpha_1 - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right); \alpha_1 - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right); \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \right) \\ &= \left(-\frac{\alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_2}{2}; 0 \right) \end{aligned}$$

On en déduit alors sa norme $\|\overrightarrow{IE}\|$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{IE}\| &= \sqrt{(x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2 + (z_E - z_I)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_2^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{2}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent les normes $\|\overrightarrow{IH}\|$ et $\|\overrightarrow{IE}\|$ sont égales.

6) Que pouvez-vous déduire de la nature de EFGH pour tout α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$?

On en déduit que EFGH a ses diagonales (qui sont déjà perpendiculaires d'après la question 1, et ont le même milieu car EFGH est un parallélogramme d'après la question 3) de même longueur.

Les diagonales du quadrilatère EFGH ont donc la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. On en conclut ainsi que EFGH est un carré.

7) Que déduisez-vous du quadrilatère ABCD ?

Il suffit d'adopter le même raisonnement que précédemment.

Tout d'abord, on calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} . On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1) \\ &= (\alpha_2; \alpha_2; 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= (x_D - x_B; y_D - y_B; z_D - z_B) = (\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1) \\ &= (-\alpha_2; \alpha_2; 0)\end{aligned}$$

Puis on calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs. On a ainsi :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\alpha_2; \alpha_2; 0) \cdot (-\alpha_2; \alpha_2; 0) = \alpha_2 \times (-\alpha_2) + \alpha_2 \times \alpha_2 + 0 \times 0 = -\alpha_2^2 + \alpha_2^2 + 0 = 0$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} sont orthogonaux.

On calcule les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} . On a :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1) = (\alpha_2; 0; 0)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= (x_C - x_D; y_C - y_D; z_C - z_D) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 - \alpha_1) \\ &= (\alpha_2; 0; 0)\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont égaux.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme. Or ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires (puisque les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} sont orthogonaux), donc ABCD est un losange.

Soit J le milieu de [AC]. On calcule ses coordonnées :

$$\begin{aligned}J &= \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}; \frac{z_A + z_C}{2} \right) = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{\alpha_1 + \alpha_1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \frac{2\alpha_1}{2} \right) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}; \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}; \alpha_1 \right)\end{aligned}$$

On calcule ensuite les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{DJ} et \overrightarrow{DB} . On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DJ} &= (x_J - x_D; y_J - y_D; z_J - z_D) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1; \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 - \alpha_1 \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_2}{2}; -\frac{\alpha_2}{2}; 0 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= (x_B - x_D; y_B - y_D; z_B - z_D) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2); \alpha_1 - \alpha_1) \\ &= (\alpha_2; -\alpha_2; 0)\end{aligned}$$

On remarque que $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{DB}$ donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{DJ} et \overrightarrow{DB} sont colinéaires avec un point commun D. Par conséquent, les points D, J et B sont alignés et $J \in (DB)$.

Enfin, on calcule les normes $\|\overrightarrow{DJ}\|$ et $\|\overrightarrow{AJ}\|$. On a ainsi :

$$\|\overrightarrow{DJ}\| = \sqrt{(x_J - x_D)^2 + (y_J - y_D)^2 + (z_J - z_D)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_2^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{2}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_2 \sqrt{2}}{2}$$

On calcule ensuite les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AJ} . On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= (x_J - x_A; y_J - y_A; z_J - z_A) = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1; \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1; \alpha_1 - \alpha_1\right) \\ &= \left(\frac{\alpha_2}{2}; \frac{\alpha_2}{2}; 0\right)\end{aligned}$$

On en déduit alors sa norme $\|\overrightarrow{AJ}\|$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AJ}\| &= \sqrt{(x_J - x_A)^2 + (y_J - y_A)^2 + (z_J - z_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_2^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{2}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha_2 \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent les normes $\|\overrightarrow{DJ}\|$ et $\|\overrightarrow{AJ}\|$ sont égales.

On en déduit que le quadrilatère ABCD a ses diagonales (qui sont déjà perpendiculaires et ont le même milieu car ABCD est un parallélogramme) de même longueur.

Les diagonales du quadrilatère ABCD ont donc la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. On en conclut ainsi que ABCD est aussi un carré.

A partir de maintenant nous avons $\alpha_1 = 0$.

De plus on considère que si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

8) Montrez que \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{BF} sont égaux

Avec $\alpha_1 = 0$, les points A, B, E et F ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned}A(0; 0; 0) \\ B(\alpha_2; 0; 0) \\ E(0; 0; \alpha_2) \\ F(\alpha_2; 0; \alpha_2)\end{aligned}$$

On calcule alors les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{BF} . On a ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= (x_E - x_A; y_E - y_A; z_E - z_A) = (0 - 0; 0 - 0; \alpha_2 - 0) = (0; 0; \alpha_2) \\ \overrightarrow{BF} &= (x_F - x_B; y_F - y_B; z_F - z_B) = (\alpha_2 - \alpha_2; 0 - 0; \alpha_2 - 0) = (0; 0; \alpha_2)\end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées donc on en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{BF} sont égaux.

9) Montrez que $\|\overrightarrow{AE}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$ sont égaux

On calcule tout d'abord la norme $\|\overrightarrow{AE}\|$. On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AE}\| &= \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \alpha_2^2} \\ &= \sqrt{\alpha_2^2} = \alpha_2 \text{ (Car une longueur est toujours positive ou nulle)}\end{aligned}$$

On calcule ensuite les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} . On a :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (\alpha_2 - 0; 0 - 0; 0 - 0) = (\alpha_2; 0; 0)$$

On en déduit alors sa norme $\|\overrightarrow{AB}\|$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{\alpha_2^2 + 0^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\alpha_2^2} = \alpha_2 \text{ (Car une longueur est toujours positive ou nulle)}\end{aligned}$$

Par conséquent les normes $\|\overrightarrow{AE}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$ sont égales.

10) On considère que \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{EF} sont orthogonaux. Que déduisez-vous sur la nature de la figure ABCDEFGH ?

Les vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{EF} sont orthogonaux donc les droites (AE) et (EF) sont perpendiculaires. De plus, d'après les questions 6, 7 et 9, $\|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ et les quadrilatères ABCD et EFGH sont des carrés. Par conséquent, la figure ABCDEFGH est un cube.

Exercice n° 2 :

Partie A :

Soit $P_n = 4^n + 5$

Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3

On démontre par un raisonnement par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3.

Initialisation : $n = 1$

$P_1 = 4^1 + 5 = 4 + 5 = 9$ qui est bien un multiple de 3 (Car $9 = 3 \times 3$)

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n , on démontre qu'elle est aussi vraie au rang suivant $n + 1$.

Autrement dit, on suppose que $P_n = 4^n + 5$ est un multiple de 3, on démontre que $P_{n+1} = 4^{n+1} + 5$ est aussi un multiple de 3.

On a alors :

$$P_{n+1} = 4^{n+1} + 5$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = 4^n \times 4 + 5 \text{ (Car } 4^{n+1} = 4^n \times 4)$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = 4^n \times 4 + 5 \times 4 - 5 \times 4 + 5 \text{ (En ajoutant et soustrayant } 5 \times 4 = 20)$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = (4^n + 5) \times 4 - 20 + 5$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = P_n \times 4 - 15$$

Or, par hypothèse de récurrence, P_n est un multiple de 3. Donc $P_n \times 4$ est aussi un multiple de 3.

De plus, 15 est évidemment un multiple de 3 (car $15 = 3 \times 5$)

Par conséquent, par différence de deux multiples de 3, $P_{n+1} = 4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.

On conclut alors d'après le principe de récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3.

Partie B :

Soit U_n définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_1 = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

1) Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n < 3$

On démontre par un raisonnement par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n < 3$.

Initialisation : $n = 1$

$$U_1 = 1 < 3$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n , on démontre qu'elle est aussi vraie au rang suivant $n + 1$.

Autrement dit, on suppose que $U_n < 3$, on démontre que $U_{n+1} < 3$.

On a alors :

$$U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

$$U_{n+1} < \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3n+6}{2(n+1)} \quad (\text{D'après l'hypothèse de récurrence } U_n < 3)$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} < \frac{3n+3n+6}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} < \frac{6n+6}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} < \frac{6(n+1)}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} < 3$$

On conclut alors d'après le principe de récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < 3$.

2) Étudiez le sens de variation de (U_n)

On doit étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$. On a ainsi :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} - U_n$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} U_n - \frac{2(n+1)}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} \quad (\text{En réduisant au même dénominateur})$$

$$= \frac{n-2n-2}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} = \frac{-n-2}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n > \frac{-n-2}{2(n+1)} \times 3 + \frac{3n+6}{2(n+1)} \quad (\text{Car d'après la question précédente } U_n < 3)$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n > \frac{-3n-6}{2(n+1)} + \frac{3n+6}{2(n+1)} = \frac{3n+6-3n-6}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$$

On en déduit que la suite (U_n) est strictement croissante.

3) Calculer la limite de (U_n)

La suite (U_n) est une suite croissante et majorée (par 3), donc elle converge vers une limite que l'on note l .

On en déduit alors que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$. On détermine alors sa limite en résolvant l'équation suivante :

$$l = \frac{n}{2(n+1)} \times l + \frac{3n+6}{2(n+1)} \Leftrightarrow l - \frac{n}{2(n+1)} \times l = \frac{3n+6}{2(n+1)} \Leftrightarrow \frac{2(n+1)}{2(n+1)} l - \frac{n}{2(n+1)} \times l = \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+2-n}{2(n+1)} \times l = \frac{3n+6}{2(n+1)} \text{ (En réduisant au même dénominateur)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{2(n+1)} \times l = \frac{3n+6}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (n+2) \times l = 3n+6 \text{ (Avec } 2(n+1) \neq 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^* \text{ donc } n \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (n+2) \times l = 3(n+2)$$

$$\Leftrightarrow l = 3 \text{ (Avec } n+2 \neq 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^* \text{ donc } n \neq -2)$$

On en conclut alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$

4) Soit (V_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = n(3 - U_n)$

a) Déterminez la nature de cette suite

Par définition de la suite (V_n) , on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (n+1)(3 - U_{n+1}) = (n+1) \left[3 - \left(\frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} \right) \right] \\ &= (n+1) \left(\frac{-n}{2(n+1)} U_n + 3 - \frac{3n+6}{2(n+1)} \right) = (n+1) \left(\frac{-n}{2(n+1)} U_n + \frac{6(n+1)-(3n+6)}{2(n+1)} \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{-n}{2(n+1)} U_n + \frac{6n+6-3n-6}{2(n+1)} \right) = (n+1) \left(\frac{-n}{2(n+1)} U_n + \frac{3n}{2(n+1)} \right) \\ &= -\frac{n}{2} U_n + \frac{3n}{2} = \frac{1}{2} \times n(3 - U_n) = \frac{1}{2} \times V_n \end{aligned}$$

On en déduit alors que la suite (V_n) est géométrique.

b) Précisez sa raison et calculez V_1

La suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ d'après la question précédente.

Son premier terme est $V_1 = 1 \times (3 - U_1) = 1 \times (3 - 1) = 1 \times 2 = 2$

c) Exprimez (V_n) puis (U_n) en fonction de n

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$V_n = n(3 - U_n) \Leftrightarrow V_n = 3n - nU_n \Leftrightarrow nU_n = 3n - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{3n - V_n}{n} = 3 - \frac{V_n}{n} = 3 - \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} \text{ (En remarquant que } 2 = 2^1 \text{ et donc } 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^1 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}})$$

$$\Leftrightarrow U_n = 3 - \frac{1}{n \times 2^{n-2}}$$

d) Calculez la limite de (U_n)

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times 2^{n-2} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \times 2^{n-2}} = 0$$

Finalement, on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3 - 0 = 3$ ce qui corrobore le résultat de la question 3.

Exercice n° 3 :

Partie A :

Soit une agence de location ayant un parc de 18 voitures.

10 voitures sont systématiquement louées à des clients réguliers.

La loi de probabilité du nombre de voitures louées par jour (nommée X) est donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(X = x_i)$
11	0,10
12	0,17
13	0,27
14	0,25
15	0,12
16	0,05
17	0,03
18	0,01

1) Déterminez l'espérance du nombre de voitures louées par jour.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures louées par jour.

L'espérance mathématique de X est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=11}^{18} x_i \times P(X = x_i) \\ &= 11 \times 0,10 + 12 \times 0,17 + 13 \times 0,27 + 14 \times 0,25 + 15 \times 0,12 + 16 \times 0,05 + 17 \times 0,03 + 18 \times 0,01 \\ &= 1,1 + 2,04 + 3,51 + 3,5 + 1,8 + 0,8 + 0,51 + 0,18 = 13,44 \end{aligned}$$

2) Déterminez l'écart type associé (3 décimales)

On calcule tout d'abord la variance mathématique de X qui est donnée par la formule :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=11}^{18} x_i^2 \times P(X = x_i) - (E(X))^2 \text{ (Formule de Koenig-Huygens)}$$

$$\begin{aligned}
&= 11^2 \times 0,10 + 12^2 \times 0,17 + 13^2 \times 0,27 + 14^2 \times 0,25 + 15^2 \times 0,12 + 16^2 \times 0,05 + 17^2 \times 0,03 + 18^2 \times 0,01 - 13,44^2 \\
&= 121 \times 0,10 + 144 \times 0,17 + 169 \times 0,27 + 196 \times 0,25 + 225 \times 0,12 + 256 \times 0,05 + 289 \times 0,03 + 324 \times 0,01 - 180,6336 \\
&= 12,1 + 24,48 + 45,63 + 49 + 27 + 12,8 + 8,67 + 3,24 - 180,6336 \\
&= 182,92 - 180,6336 = \mathbf{2,2864}
\end{aligned}$$

Puis on en déduit l'écart type, qui est égal à la racine carrée de la variance. Ainsi :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,2864} \approx \mathbf{1,512} \text{ (Arrondi à 3 décimales près)}$$

L'agence a 300 € de frais fixes par jour et sa marge par véhicule loué est de 20 €.

3) Calculez le bénéfice quotidien espéré.

Le bénéfice quotidien espéré est la différence entre la recette quotidienne espérée et les coûts quotidiens. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\text{Bénéfice quotidien espéré} = \text{Recette quotidienne espérée} - \text{Coûts quotidiens} \\
&= E(X) \times 20 - 300 = 13,44 \times 20 - 300 = 268,8 - 300 = \mathbf{-31,2 \text{ €}}
\end{aligned}$$

On en déduit qu'en moyenne, l'agence perd 31,20 € par jour.

4) Est-ce que l'agence est rentable ? Si non, déterminez de combien elle devra augmenter ses tarifs pour être sûre de ne pas perdre d'argent chaque jour.

Puisque le bénéfice quotidien espéré est négatif, on en déduit que l'agence n'est pas rentable. Soit x le montant supplémentaire à ajouter à la marge pour obtenir un bénéfice positif.

On souhaite alors l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
&\text{Bénéfice quotidien espéré} \geq 0 \Leftrightarrow 13,44 \times (20 + x) - 300 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 268,8 + 13,44x - 300 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 13,44x - 31,2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 13,44x \geq 31,2 \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{31,2}{13,44} \approx \mathbf{2,32 \text{ €}}
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il faut augmenter la marge de 2,33 € pour que l'agence soit rentable (et non pas de 2,32 € même si 2,32 est plus proche de 2,321 que de 2,33).

En effet :

Avec une marge augmentée de 2,32 €, on obtient un bénéfice de $13,44 \times 22,32 - 300 = -0,0192$ € soit encore $-1,92$ centime d'euro < 0 .

Tandis qu'avec une marge augmentée de 2,33 €, on obtient un bénéfice de $13,44 \times 22,33 - 300 = 0,1152$ € soit encore $11,52$ centime d'euro > 0 .

Partie B :

Dans une fête foraine, un organisateur dispose de 2 sacs de 30 boules chacune.

Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

Le S_1 sac numéro 1 comprend 27 boules blanches et 3 boules rouges.

Le S_2 sac numéro 2 comprend 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et tire une boule dans le S_1 qu'il remet ensuite dans le S_1 .
- Si la boule est rouge alors le joueur tire une boule dans le S_2 et note la couleur et s'arrête là.
- Si la boule est blanche il tire une boule dans le S_1 et note la couleur et s'arrête là.

Soit A et B les événements :

A : « Les deux boules tirées sont rouges »

B : « Une seule des boules tirées est rouge »

1) Déterminez $p(A)$ et $p(B)$ (Vous pourrez vous aider d'un arbre pondéré)

On pose les événements suivants :

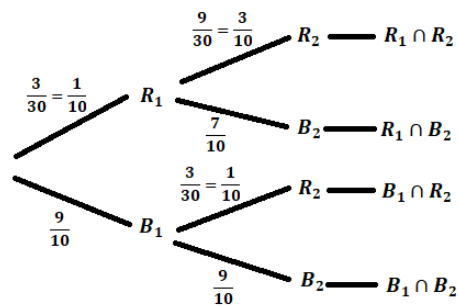
R_1 : « La première boule tirée est rouge »

B_1 : « La première boule tirée est blanche »

R_2 : « La seconde boule tirée est rouge »

B_2 : « La seconde boule tirée est blanche »

On a donc l'arbre pondéré suivant correspondant à la situation :



D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a ainsi :

$$p(A) = p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{100} = 0,03$$

D'autre part, comme les événements R_1 et B_1 forment une partition de l'univers Ω , on a d'après la formule des probabilités totales :

$$p(B) = p(R_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap R_2) = p(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + p(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \\ = \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{7}{100} + \frac{9}{100} = \frac{16}{100} = 0,16$$

Si deux boules obtenues sont rouges alors le joueur reçoit 10 €, si une seule boule est rouge il reçoit 2 € sinon il perd sa mise.

X désigne alors la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2) Déterminez la loi de probabilité de X.

Tout d'abord, les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -1 (Le joueur perd sa mise de départ) ; $2 - 1 = 1$ (Si une seule boule est rouge) et $10 - 1 = 9$ (Si les deux boules sont rouges).

On a ainsi :

$$p(X = 9) = p(A) = 0,03$$

$$p(X = 1) = p(B) = 0,16$$

$$p(X = -1) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - 0,03 - 0,16 = 0,81$$

D'où le tableau :

x_i	-1	1	9
$p(X = x_i)$	0,81	0,16	0,03

A noter que : $p(X = -1) + p(X = 1) + p(X = 9) = 0,81 + 0,16 + 0,03 = 1$.

3) En déduire l'espérance mathématique de X. Qu'en déduisez-vous ?

L'espérance mathématique de X est donnée par la formule :

$$E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i) = -1 \times 0,81 + 1 \times 0,16 + 9 \times 0,03 \\ = -0,81 + 0,16 + 0,27 = -0,38 < 0$$

L'espérance mathématique de X étant négatif, on en déduit alors que le jeu est défavorable au joueur.

Soit n un entier naturel supérieur à 2, le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes.

4) Démontrez que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - \alpha^n$. Vous déterminerez α .

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur pioche dans le sac S_2 .

Il s'agit de n répétitions identiques et indépendantes (car n parties consécutives et indépendantes) d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = p(R_1) = \frac{1}{10}$

Or la probabilité que le joueur pioche au moins une fois dans le sac S_2 est égale à $1 -$ la probabilité qu'il ne pioche aucune fois dans ce sac.

Ainsi, la probabilité qu'il ne pioche pas dans le sac S_2 est égale à $1 - p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Et par conséquent : $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n = 1 - \alpha^n$ (Avec $\alpha = \frac{9}{10}$)

5) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

On a ainsi :

$$p_n > 0,9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n > 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < 1 - 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < 0,1$$

$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) < \ln(0,1)$ (Car la fonction logarithme népérien est strictement croissante et que pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul : $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$)

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85 \text{ (Car } \ln(0,9) < 0, \text{ en effet } 0 < 0,9 < 1, \text{ donc l'inégalité change)}$$

Par conséquent, la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$ est l'entier naturel strictement supérieur à 21,85, soit encore $n = 22$.

Exercice n° 4 :

1) Résolvez l'inéquation (et non pas inégalité comme le sujet le sous-entend...) suivante : $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$

Tout d'abord, on doit déterminer l'ensemble de définition des 2 membres de l'inéquation.

Membre de gauche :

$\ln(x^2 - 5x - 14)$ est défini pour $x^2 - 5x - 14 > 0$

On calcule son discriminant Δ . On obtient :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2 > 0. \text{ Donc deux racines qui sont :}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{81}}{2} = \frac{5 - 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{81}}{2} = \frac{5 + 9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines et de $-a = -1 < 0$ à l'intérieur.
Ainsi $\ln(x^2 - 5x - 14)$ est défini sur l'intervalle $]-\infty; -2[\cup]7; +\infty[$.

Membre de droite :

$\ln(2x^2 - 10x + 8)$ est défini pour $2x^2 - 10x + 8 > 0$

On calcule son discriminant Δ . On obtient :

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36 = 6^2 > 0$. Donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 - 6}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{10 + \sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{10 + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Le polynôme est du signe de $a = 2 > 0$ à l'extérieur des racines et de $-a = -2 < 0$ à l'intérieur.
Ainsi $\ln(2x^2 - 10x + 8)$ est défini sur l'intervalle $]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$.

Par conséquent, on doit résoudre l'inéquation sur l'ensemble le plus restrictif, soit encore pour :
 $x \in]-\infty; -2[\cup]7; +\infty[$.

On résout à présent l'inéquation. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 5x - 14) &\geq \ln(2x^2 - 10x + 8) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 &\geq 2x^2 - 10x + 8 \text{ (En passant par l'exponentielle qui est strictement croissante)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 - x^2 + 5x + 14 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 22 &\leq 0 \end{aligned}$$

On calcule de nouveau le discriminant Δ . On obtient :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 22 = 25 - 88 = -63 < 0.$$

Donc le polynôme n'admet pas de racine réelle et est du signe de $a = 1 > 0$.

Il est donc impossible que $x^2 - 5x + 22 \leq 0$.

Par conséquent, l'inéquation $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$ n'admet pas de solution et $S = \emptyset$.

2) Déterminez une primitive de la fonction suivante :

$$k(x) = 6\sin(2x)\cos^3(2x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Tout d'abord, les fonctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \cos^3(2x)$ sont continues sur \mathbb{R} , donc par produit de fonctions continues sur \mathbb{R} , la fonction k est continue sur \mathbb{R} .

De ce fait, elle admet bien une primitive sur \mathbb{R} .

k est de la forme $u' \times u^n$ avec $u(x) = \cos(2x)$ donc $u'(x) = -2\sin(2x)$ et $n = 3$.

Or une primitive d'une fonction de la forme $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$

En remarquant que $k(x) = 6\sin(2x)\cos^3(2x) = -3 \times (-2\sin(2x)) \times \cos^3(2x)$, on en déduit qu'une primitive de k est :

$$K(x) = -3 \times \frac{1}{3+1} \times \cos^{3+1}(2x) + C = -\frac{3}{4}\cos^4(2x) + C \text{ (Avec } c \text{ une constante réelle)}$$

3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x) - x$


a) Étudiez les variations de f sur $[1; +\infty[$

Comme les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $[1; +\infty[$, par différence de deux fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$, f est bien définie et dérivable sur $[1; +\infty[$.

On a ainsi :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \text{ pour tout } x \in [1; +\infty[$$

On dresse alors le tableau de variations de f :

x	1	$+\infty$
$1-x$	—	
x	+	
$f'(x)$	—	
f		

On en déduit alors que f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

De plus, on a :

$$f(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(x) = \ln(x) - x = x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right)$$

Or, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) = +\infty \times (0 - 1) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

b) Déduisez que pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(x) < x$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1) \text{ (Car la fonction logarithme népérien est strictement croissante)} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \ln(x) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le tableau de variations de f , on en déduit que $f(x) \leq -1$

Or $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow \ln(x) - x \leq -1$ (En remplaçant $f(x)$ par son expression)

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq x - 1$ (En ajoutant x des deux côtés de l'inégalité)

En remarquant que $x - 1 < x$, on obtient alors que : $\ln(x) \leq x - 1 < x$

Finalement : pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(x) < x$

c) Prouvez alors que pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \frac{\ln(x)}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

D'après la question précédente, pour tout $x \geq 1$ on a : $0 \leq \ln(x) < x$

On pose $u = \sqrt{x}$, ainsi on obtient avec $u \geq 1$ (Car $x \geq 1$ par hypothèse) :

$$0 \leq \ln(u) < u \Leftrightarrow 0 \leq \ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \ln(x) < \sqrt{x} \text{ (Car } \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(x))$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2x} \ln(x) < \frac{\sqrt{x}}{x} \text{ (En divisant par } x \geq 1 \text{ donc } > 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ (Car } \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}})$$

d) Calculez alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

D'après la question précédente, on a : pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x} = 0$

Finalement, on a ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{0}{1/2} = 0$

4) Soit les intégrales définies par :

$$I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx \text{ et } J = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$$

a) Démontrez que $I = -J$ et aussi que $I = J + e^\pi + 1$

Tout d'abord, les fonctions $x \mapsto e^x \sin(x)$ et $x \mapsto e^x \cos(x)$ sont bien continues sur l'intervalle $[0; \pi]$ (car produits de fonctions continues sur ce même intervalle). Par conséquent, les intégrales I et J existent et sont bien définies sur $[0; \pi]$.

Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont bien dérivables sur l'intervalle $[0; \pi]$ et leurs dérivées respectives $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont bien continues sur ce même intervalle. Par conséquent, on peut effectuer une première intégration par parties dans I . On obtient :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(x) \text{ donc } u'(x) = \cos(x) \text{ en dérivant} \\ v'(x) &= e^x \text{ donc } v(x) = e^x \text{ en intégrant} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= [u(x) \times v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x) \times v(x) dx \\ &= [\sin(x) \times e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x) \times e^x dx = [e^x \times \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x) dx \\ &= e^\pi \times \sin(\pi) - e^0 \times \sin(0) - J \\ &= e^\pi \times 0 - 1 \times 0 - J \\ &= -J \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, en faisant une seconde intégration par parties dans l'intégrale I , on obtient :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \text{ donc } u'(x) = e^x \text{ en dérivant} \\ v'(x) &= \sin(x) \text{ donc } v(x) = -\cos(x) \text{ en intégrant} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= [u(x) \times v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x) \times v(x) dx \\ &= [e^x \times (-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \times (-\cos(x)) dx = [-e^x \times \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos(x) dx \\ &= -e^\pi \times \cos(\pi) - (-e^0 \times \cos(0)) + J \\ &= -e^\pi \times (-1) - (-1 \times 1) + J \\ &= J + e^\pi + 1 \end{aligned}$$

b) Vous en déduirez les valeurs exactes de I et de J

D'après les deux égalités obtenues à la question précédente, on obtient un système de deux équations à deux inconnues I et J :

$$\begin{aligned} \begin{cases} I = -J \\ I = J + e^\pi + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ -J = J + e^\pi + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ 2J = -e^\pi - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ J = \frac{-e^\pi - 1}{2} = -\frac{e^\pi + 1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{e^\pi + 1}{2} \\ J = -\frac{e^\pi + 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $I = \frac{e^{\pi+1}}{2}$ et $J = -\frac{e^{\pi+1}}{2}$

Exercice n° 5 :

Dans le plan Π muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, un point mobile M a une position à l'instant t ainsi définie :

Le vecteur vitesse s'exprime en fonction de t par : $\vec{v}(t) = e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t}{1+e^t} \vec{e}_2$.

1) A l'instant $t = 0$, les coordonnées de M sont $(2; \ln(2))$.

Déterminez en fonction de t : les coordonnées $(x(t); y(t))$ du point mobile M.

On intègre les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(t) = e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t}{1+e^t} \vec{e}_2$ par rapport au temps t pour obtenir le vecteur position $\vec{OM}(t)$. Ainsi :

$\vec{OM}(t) = \int \vec{v}(t) dt = e^t \vec{e}_1 + C_1 + \ln(1 + e^t) \vec{e}_2 + C_2$ (Avec C_1 et C_2 deux constantes réelles à déterminer)

Or on peut déterminer les constantes C_1 et C_2 à partir des coordonnées du point M à l'instant $t = 0$ qui sont $(2; \ln(2))$. Ainsi :

$$x(0) = 2 \Rightarrow e^0 + C_1 = 2 \Leftrightarrow 1 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2 - 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$y(0) = \ln(2) \Rightarrow \ln(1 + e^0) + C_2 = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(1 + 1) + C_2 = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(2) + C_2 = \ln(2) \Leftrightarrow C_2 = \ln(2) - \ln(2) \Leftrightarrow C_2 = 0$$

Et finalement : $x(t) = e^t + 1$ et $y(t) = \ln(1 + e^t)$

2) Démontrez que la trajectoire est une partie, à préciser, de la courbe d'équation $y = \ln(x)$

D'après les résultats de la question précédente, on en déduit que :

$$x(t) = e^t + 1$$

$$y(t) = \ln(1 + e^t) = \ln(e^t + 1) = \ln(x(t))$$

L'instant $t = 0$ est la plus petite valeur prise par t qui représente le temps, ainsi $t \in [0; +\infty[$.

Or $x(t) = e^t + 1$, donc la plus petite valeur prise par $x(t)$ est $x(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Ainsi, la trajectoire est la partie de la courbe d'équation $y = \ln(x)$ qui va de $x = 2$ à l'infini, soit encore la portion de la courbe du logarithme népérien sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

3) Calculez le vecteur accélération $\vec{a}(t)$

Par définition, le vecteur accélération est égal à la dérivée par rapport au temps t du vecteur vitesse.

Ainsi :

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t}{1+e^t} \vec{e}_2 \right) = e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t \times (1+e^t) - e^t \times e^t}{(1+e^t)^2} \vec{e}_2$$

$$= e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t + (e^t)^2 - (e^t)^2}{(1 + e^t)^2} \vec{e}_2 = e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} \vec{e}_2$$

$$\text{Et finalement } \vec{a}(t) = e^t \vec{e}_1 + \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \vec{e}_2$$

FIN DU CORRIGÉ