

Nom de naissance :



Premier prénom :

Numéro candidature :

17.5 / 20

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Concours externe

Session : 2024

Epreuve n° : 2

Matière : Mathématiques

CONSIGNES

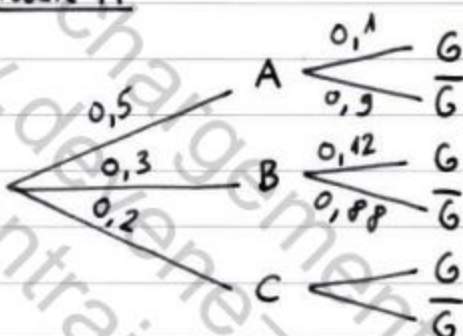
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Feuille :

01 / 03

Exercice 1 Partie A

[1]



[2] a) $P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = 0,5 \times 0,1 = \underline{0,05}$

$P(B \cap G) = 0,3 \times 0,12 = \underline{0,036}$

[2] b) D'après l'énoncé on a posé $P(G) = p$. D'après la formule des probabilités totales on sait que :

$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G)$ car $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω .

$\Leftrightarrow \underline{P(C \cap G) = p - 0,05 - 0,036 = p - 0,086}$

[3] On pose maintenant $p = 0,1$ et on cherche $\underline{P_C(G) = \frac{P(C \cap G)}{P(C)}}$

$$= \frac{p - 0,086}{0,2} = \frac{0,1 - 0,086}{0,2} = \underline{0,07}$$

[4] On cherche $\underline{P_{\bar{G}}(B \cup C) = 1 - P_{\bar{G}}(A) = 1 - \frac{P(\bar{G} \cap A)}{P(\bar{G})} = 1 - \frac{0,5 \times 0,9}{1 - p}}$

$$= 1 - \frac{0,5 \times 0,9}{0,9} = 1 - 0,5 = \underline{0,5}$$

(Exercice 1) Partie B

- ① X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès de la répétition d'expériences de Bernoulli, indépendantes les unes des autres. On peut aussi parler de tirages avec remise. X suit donc une loi binomiale de paramètres n = nombre de répétitions de l'expérience, $n=10$ ici ; et p = probabilité du succès, $= p$ la proportion de brebis galeuses ici.
 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; p)$

- ② On sait que $E(X) = np = 10p = 1$;
 $V(X) = npq = 1 \times q = 1 - p = 0,9$;
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,9} \approx 0,949$.

- ③ $P(X=2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = \frac{10!}{8!2!} 0,1^2 0,9^8 = \frac{10 \times 9}{2} 0,1^2 0,9^8 \approx 0,194$

- ④ On cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^{10} = 1 - 0,9^{10} \approx 0,651$

Exercice 2

(u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1$

Partie A

- ① Calculons $\sum_{k=1}^m k = 1 + 2 + \dots + m$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } 2 \sum_{k=1}^m k &= 1 + 2 + \dots + m + 1 + 2 + \dots + m \\ &= \underbrace{1+m}_{m+1} + \underbrace{2+m-1}_{m+1} + \underbrace{3+m-2}_{m+1} + \dots + \underbrace{m+1}_{m+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2 \sum_{k=1}^m k = m(m+1) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} .$$

② ② $\sum_{k=0}^n q^k$, avec $q \neq 1$, est la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Cette somme est égale à:
 (premier terme) $\times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}$

C'est-à-dire : $\sum_{k=0}^n q^k = q^0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

③ On a donc que $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$

Partie B

① ② $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 2 = u_1$

$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4} \times 2 + 1 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \times 3 + 1 = \frac{4}{4} + \frac{6}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 = u_2$

③ (u_n) semble croissante.

② $P_n : \langle\langle u_n \leq n + \frac{4}{3} \rangle\rangle$

③

$P_1 : \langle\langle u_1 \leq 1 + \frac{4}{3} \rangle\rangle \Leftrightarrow 2 \leq 1 + \frac{4}{3}$ ce qui est vrai. (car $\frac{4}{3} \geq 1$)

$P_2 \Leftrightarrow u_2 \leq 2 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3 \leq 2 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{4}{3}$ ce qui est vrai.

$P_0 \Leftrightarrow u_0 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{4}{3}$, encore vrai.

P_0, P_1 et P_2 sont vraies, et d'ailleurs équivalentes.

③ L'initialisation du raisonnement par récurrence pour la proposition P_n a été faite dans la question précédente. Vérifions l'hérédité:

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k soit vraie.

On sait que $u_k \leq k + \frac{4}{3}$.

Calculons $u_{k+1} = \frac{1}{4} u_k + \frac{3}{4} (k+1) + 1$

$\Leftrightarrow 4u_{k+1} = u_k + 3(k+1) + 4$ or par hypothèse, $u_k \leq k + \frac{4}{3}$.

Donc $4u_{k+1} \leq k + \frac{4}{3} + 3k + 3 + 4 = 4k + 4 + \frac{4}{3} + 3$

$\Leftrightarrow 4u_{k+1} \leq 4(k+1) + \frac{4}{3} + 3$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq (k+1) + \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ or $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \leq \frac{4}{3}$ donc on a :

$\Rightarrow u_{k+1} \leq (k+1) + \frac{4}{3}$. On a donc démontré P_{k+1} , sachant P_k vraie.

\mathcal{I} : initialisation et la récurrence étant démontrées, P_n étant vraie au premier rang puis par récurrence, alors on a démontré que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

[3] (a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} n + 1 - u_n$

$= \frac{3}{4} (n + \frac{4}{3} + u_n (\frac{1}{3} - \frac{4}{3})) = \frac{3}{4} (n + \frac{4}{3} - u_n)$

(b) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{4}{3}$ donc $n + \frac{4}{3} - u_n \geq 0$.

Donc d'après la réponse précédente, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 (u_n) est donc croissante.

[4] $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{4} n + 1 - n - 1$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{4} n = \frac{1}{4} (u_n - n) = \frac{1}{4} v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

Nom de naissance :



Premier prénom :

Numéro candidature :

17.5 / 20

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Contrôle externe

Session : 2024

Epreuve n° : 2

Matière : Mathématiques

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre forcée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Feuille :

02 / 03

(Exercice 2) (Partie B suite)

$$\textcircled{4} \textcircled{B} \forall m \in \mathbb{N}, \text{ on sait que } v_m = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{4^m}$$

$$\text{or on sait aussi que } v_m = u_m - m \Leftrightarrow u_m = v_m + m = \frac{1}{4^m} + m$$

\textcircled{C} (v_m) étant géométrique, de premier terme > 0 , et de raison strictement comprise entre 0 et 1, elle converge vers 0^+ en $m \rightarrow +\infty$.

$$\text{On sait que } u_m = \frac{1}{4^m} + m \text{ or } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^m} = 0^+$$

$$\text{donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} m = +\infty \text{ donc } (u_m) \text{ diverge.}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \forall m \in \mathbb{N}, S_m &= \sum_{k=0}^m u_k = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{4^k} + k\right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{4^k} + \sum_{k=0}^m k \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4^{m+1}}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{m+1}}\right) + \frac{(m+1)m}{2} = S_m \end{aligned}$$

Exercice 3 $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, avec $a \leq b$, on définit:

$$m = \frac{a+b}{2} ; m_g = \sqrt{ab} ; m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Partie A

$$\textcircled{1} a \text{ et } b \in \mathbb{R}_+^* ; a \leq m_h \Leftrightarrow a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

$$(\text{car } a > 0), \Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{1 + \frac{a}{b}} \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} \leq 2 \text{ (car } 1 + \frac{a}{b} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq 1 \Leftrightarrow a \leq b \text{ ce qui est vrai, donc } a \leq m_h.$$

$$\textcircled{2} \textcircled{a} \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, m_g \leq m \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$$

$$\Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \text{ (par passage au carré, fonction croissante)}$$

$$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 \text{ ce qui est vrai, CQFD.}$$

$$\textcircled{b} \text{ Soit } (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2. \text{ Alors } \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ aussi.}$$

Donc on peut leur appliquer la relation démontrée précédemment.

On a donc avec $a = \frac{1}{A}$ et $b = \frac{1}{B}$,

$$m_g \leq m \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{AB}} \leq \frac{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}}{2}, \text{ CQFD.}$$

③ Avec a, b, A, B définis précédemment;

$$m_h \leq m_g \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2}{A+B} \leq \sqrt{\frac{1}{A} \times \frac{1}{B}}$$

\Leftrightarrow (en passant à l'inverse on inverse le sens de l'inégalité, car l'inverse est une fonction décroissante)

$$\Leftrightarrow \frac{A+B}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{AB}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{AB}}} = \sqrt{AB} \Leftrightarrow m \geq m_g \text{ pour les réels}$$

A et B , ce qui a été démontré vrai au $\textcircled{2} \textcircled{a}$.

$$\text{On a donc } \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, m_h \leq m_g.$$

$$\boxed{3} \quad m \leq b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{2} \leq b - \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \Leftrightarrow a \leq b \text{ ce qui est vrai.}$$

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $a \leq b$, on a $m \leq b$.

$$\boxed{4} \quad \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ t.q. } a \leq b; \quad a \leq m_h \leq m_g \leq m \leq b$$

Partie B

$$\boxed{1} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a+a}{2} = m = a; \quad m_g = \sqrt{a^2} = a; \quad m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{2}{a}} = a$$

Donc si $a=b$, toutes les moyennes sont égales.

$\boxed{2}$

$$m_h = m \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \right) \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + b = 2a \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow m_h = m$$

$\boxed{3}$ En relisant le calcul effectué au $\boxed{2} \textcircled{a}$ de la partie 2, en remplaçant l'inégalité par une égalité, on trouve facilement que:

$$m_g = m \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

On sait donc déjà que $m_g = m \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow m_h = m = m_g$

Cherchons les cas où $m_g = m_h$. D'après les calculs du $\boxed{2} \textcircled{c}$ précédent:

$$m_h = m_g \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow m = m_g \Leftrightarrow a = b.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Pour tous réels non nuls a et b , deux de leurs moyennes arithmétique, géométrique ou harmonique sont égales entre elles si et seulement si $a = b$. Dans ce cas, en réalité, les trois moyennes sont égales.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x+2)e^{-x}$, Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé.

Partie A

① La formule en question est la dérivée d'une composée de fonctions.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} &= e^{u(x)} \text{ avec } u(x) = -x. \\ &= g(u(x)) \text{ avec } g = \text{exponentielle} \Leftrightarrow g(x) = e^x \\ &= g \circ u(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (g(u(x)))' &= u'(x) g'(u(x)) \\ \text{donc ici, } (e^{-x})' &= -1 \times e^{-x} = -e^{-x}, \text{ CQFD.}\end{aligned}$$

② Calculons F' . $\forall a, b, x \in \mathbb{R}$, F dérivable comme produit d'une exponentielle et d'une fonction affine;
 $F'(x) = a e^{-x} + (ax+b)(-e^{-x})$
 $= e^{-x}(a - ax - b)$

$$\text{On cherche } a, b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } -ax + a - b = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Donc, $F(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de f .

③ Par voisinage comparé, la limite de F en $+\infty$ sera celle de l'exponentielle. C'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+$.
(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x-3 = -\infty$)

Partie B

① Par voisinage comparé,

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Cf admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

② f dérivable comme produit d'une exponentielle et d'une fonction affine,
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$
 $= e^{-x}(1 - x - 2)$
 $= e^{-x}(-x-1)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x > 1$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

Nom de naissance :



Premier prénom :

Numéro candidature :

17.5 / 20

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Contrôle externe

Session : 2024

Epreuve n° : 2

Matière : Mathématiques

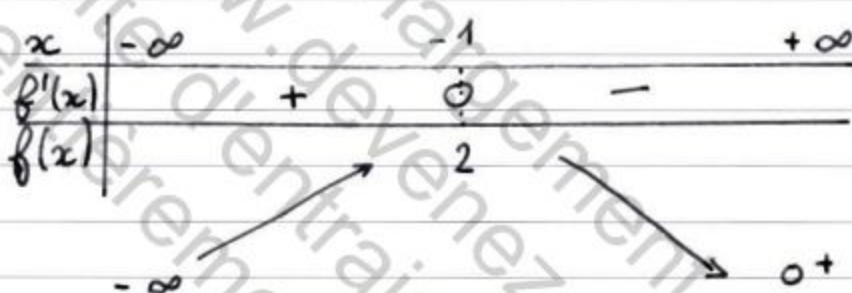
CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque feuille A3 dans le cadre à droite et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Feuille :

03 / 03

(Exercice 4) (Partie B) suite



4 la tangente à \mathcal{C} au point A d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

donc en $a=0$ on a :

$$y = f'(0)(x) + f(0) = e^{-0}(-0-1)(x) + 2 = -x + 2 \quad \text{CQFD.}$$

Exercice 5

$$1 \quad \underline{\underline{\vec{AB}}} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = \underline{\underline{(6; 0; -6)}}$$

$$\underline{\underline{\vec{AC}}} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = \underline{\underline{(0; 6; -6)}}$$

$$\underline{\underline{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}} = 6 \times 0 + 6 \times 0 + 6 \times 6 = \underline{\underline{36}}$$

© ABC est inscrite en A.

② $\vec{m} \cdot \vec{AB} = 6 + 0 - 6 = 0$ Donc \vec{m} est orthogonal à \vec{AB} et \vec{AC} , qui ne
 $\vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 + 6 - 6 = 0$ sont pas colinéaires, \vec{m} est donc orthogonal
au plan (ABC).

③ On sait que l'équation de (ABC) sera de type:

$$x + y + z + c = 0, \text{ d'après } \vec{m} \perp (ABC).$$

De plus, $A \in (ABC)$.

Donc $x_A + y_A + z_A + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow \underline{c = -5}$

④ On sait que l'équation paramétrique sera de type: de $d, \perp \hat{a}(ABC)$,

$$\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = t + y_0 \\ z = t + z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel.}$$

③ $G \in Dd$ et $G \in (ABC)$ donc on a:

$$\begin{cases} x_G = t + 1 \\ y_G = t \\ z_G = t - 2 \\ x_G + y_G + z_G - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 + t + t - 2 - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 3 \\ y_G = 2 \\ z_G = 0 \end{cases} \text{ coordonnées de G.}$$

4 Une équation de sphère de centre O est de type:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

Ici, on cherche la distance entre le point O et le plan (ABC) , appelons cette distance d .

Par Pythagore on a: $OG^2 = GI^2 + DI^2$

avec I point tangent entre la sphère et le plan (ABC) .

$$OG = \sqrt{(x_0-x_0)^2 + (y_0-y_0)^2 + (z_0-z_0)^2}, \text{ tous connus.}$$

$$DI^2 = r^2 \text{ ce qu'on recherche.}$$

GI