

Merci anonyme3
pour le partage de sa copie
pour le site devenez-fonctionnaire.f

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat

Abattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)

Rayer les mentions inutiles

Pour l'emploi de : Contrôle des Finances Publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 230 MATHÉMATIQUES

Date : 17/01/2023

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 1

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Toute autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Ces étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

réponses :
boîte provient du fournisseur A"
boîte provient du fournisseur B"
boîte présente des traces de pesticides"
boîte ne présente pas de trace de pesticides"

0,05 P

0,95 \bar{P}

0,1 P

0,9 \bar{P}

NOTE / 20
09/25

Exercice 3 :

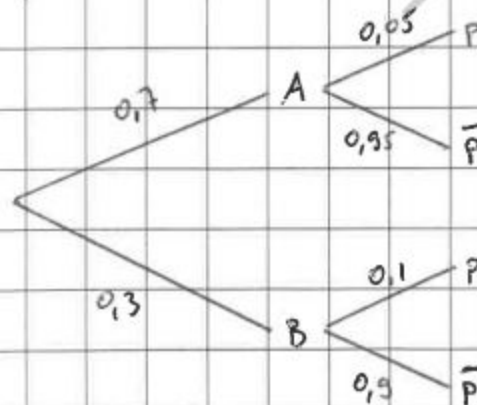
Partie 2 : probabilités conditionnelles

A

On considère les événements suivants :

- événement A : "la boîte provient du fournisseur A"
- événement B : "la boîte provient du fournisseur B"
- événement P : "la boîte présente des traces de pesticides"
- événement \bar{P} : "la boîte ne présente pas de trace de pesticides"

1) Arbre pondéré



2) Calculons la probabilité de l'événement $B \cap \bar{P}$:

$$P(B \cap \bar{P}) = P_B(\bar{P}) \times P(B) \quad (\text{Bayes})$$

$$P(B \cap \bar{P}) = 0,9 \times 0,3$$

$$P(B \cap \bar{P}) = 0,27$$

3) Calculons la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides, soit $P(\bar{P})$:

Selon la loi des probabilités totales, nous pouvons écrire :

$$P(\bar{P}) = P(\bar{P} \cap A) + P(\bar{P} \cap B)$$

$$P(\bar{P}) = P_A(\bar{P}) \times P(A) + P(B \cap \bar{P}) \quad \text{car } P(\bar{P} \cap B) = P(B \cap \bar{P})$$

$$P(\bar{P}) = 0,95 \times 0,7 + 0,27$$

$$P(\bar{P}) = 0,935$$

4) Calculons la probabilité que cette boîte prélevée provienne du fournisseur B sachant qu'elle présente des traces de pesticides, soit $P_P(B)$:

$$P_P(B) = \frac{P_B(P) \times P(B)}{P(P)}$$

$$P_P(B) = \frac{P_B(P) \times P(B)}{1 - P(\bar{P})}$$

$$P_P(B) = \frac{0,1 \times 0,3}{1 - 0,935}$$

$$P_r(B) = 0,4615$$

Une boîte présentant des traces de pesticides a 46,15% de chances de provenir du fournisseur B.

- B** 1) Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli (la boîte prélevée présente ou ne présente pas de trace de pesticides) répétée 10 fois dont les événements sont indépendants car le stock est suffisamment important.
la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,935$.

- 2) Calculons la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

On a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

D'où
$$P(X = k) = \binom{10}{k} 0,935^k \cdot 0,065^{10-k}$$

Pour $k = 10$:

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0,935^{10} \cdot 0,065^0$$

$$P(X = 10) = 0,5106$$

Il y a donc environ 51% de chances que les 10 boîtes ne présentent pas de trace de pesticides.

3) Calculons la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides, soit $P(X \geq 8)$

$$P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8} \cdot 0,935^8 \cdot 0,065^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,935^9 \cdot 0,065 + 0,935^{10}$$

$$= 45 \cdot 0,935^8 \cdot 0,065^2 + 10 \cdot 0,935^9 \cdot 0,065 + 0,935^{10}$$

$$P(X \geq 8) = 0,9767$$

Il y a donc 97,67% de chances qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Exercice 2 :

$$M_0 = 80$$

1) Le nombre initial d'enfants est de 80, la semaine suivante on enregistre une diminution de 5% de l'effectif combinée à une arrivée de 10 nouveaux inscrits. On a donc :

$$M_1 = 80 \times (1 - 0,05) + 10$$

$$M_1 = 86$$

2) Pour tout entier naturel n , on a :

$$M_{n+1} = M_n \times 0,95 + 10$$

3) a) Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = M_n - 200$.

On a donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= M_{n+1} - 200 \\ &= (M_n \times 0,95 + 10) - 200 \\ &= M_n \times 0,95 - 190 \\ &= M_n \times 0,95 - 200 \times 0,95 \\ &= 0,95 \times (M_n - 200) \end{aligned}$$

$$A_{n+1} = 0,95 \times A_n$$

Calculons A_0 :

$$\begin{aligned} A_0 &= M_0 - 200 \\ &= 80 - 200 \end{aligned}$$

$$A_0 = -120$$

La suite (A_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $A_0 = -120$.

b) Ainsi on peut écrire :

$$A_n = A_0 \times q^n$$

$$A_n = -120 \times 0,95^n$$

c) Calculons les 10 premiers termes de la suite (A_n)

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
-120	-114	-108,3	-102,9	-97,7	-92,9	-88,2	-83,8	-79,6	-75,6

d) = Précisons à une démonstration par récurrence :

Hypothèse : $H(k) = 200 - 120 \times 0,95^k$

Initialisation = prouvons que pour $n = 0$, l'hypothèse

$H(0)$ est vraie :

Pour le nombre de gauche : $M_0 = 80$

Pour le nombre de droite : $200 - 120 \times 0,95^0 = 200 - 120 = 80$

$H(0)$ est donc vraie.

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un réel k tel que $H(k)$ est vraie.

Hérédité : calculons $H(k+1)$:

$$\begin{aligned} H(k+1) &= 200 - 120 \times 0,95^{k+1} \\ &= 200 - 120 \times 0,95^k \times 0,95 \end{aligned}$$

d) $A_n = M_n - 200$

$\Leftrightarrow M_n = A_n + 200$

$\Leftrightarrow M_n = -120 \times 0,95^n + 200$ (d'après la question 3b)

$\Leftrightarrow \boxed{M_n = 200 - 120 \times 0,95^n}$

4) a) $M_{n+1} - M_n = (M_n \times 0,95 + 10) - M_n$

$= M_n (0,95 - 1) + 10$

$= M_n \times (-0,05) + 10$

$= (200 - 120 \times 0,95^n) \times (-0,05) + 10$

$= 200 \times (-0,05) - 120 \times 0,95^n \times (-0,05) + 10$

(pour les épreuves à option,
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N° 1

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

$$M_{n+1} - M_n = -10 + 6 \times 0,95^n + 10$$

$$M_{n+1} - M_n = 6 \times 0,95^n$$

b) Pour tout entier naturel n :

$$0,95^n > 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \times 0,95^n > 0$$

$$\Leftrightarrow M_{n+1} - M_n > 0$$

$$\Leftrightarrow M_{n+1} > M_n$$

La suite (M_n) est donc une suite croissante ; on en déduit que le nombre d'inscriptions augmente toutes les semaines.

c) On cherche la valeur de n pour :

$$M_n = M_0 \times 2$$

$$\Leftrightarrow M_n = 80 \times 2$$

$$\Leftrightarrow M_n = 160$$

$$\Leftrightarrow 200 - 120 \times 0,95^n = 160$$

$$\Leftrightarrow 120 \times 0,95^n = 40$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n = \frac{40}{120}$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,95^n) = \ln(1/3)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,95) = \ln(1/3)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(1/3)}{\ln(0,95)}$$

$$\Leftrightarrow n \approx 21,41$$

Le nombre d'enfants inscrits aura donc strictement doublé après 22 semaines.

Exercice 1:

Soit la fonction $f(x) = x^2 e^x$ définie sur D_f .

Partie 1

1) x^2 est définie sur \mathbb{R} .

e^x est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $f(x)$, produit de ces deux fonctions, est donc définie sur \mathbb{R} .

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$$

$$2) \quad f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = (2x + x^2) e^x$$

$$f'(x) = x(2+x) e^x$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2+x=0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

0 et -2 sont les deux racines de $f'(x)$

$$3) \quad f(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$$

$$f'(x) = (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x$$

$$f'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c) e^x$$

$$\boxed{f'(x) = (ax^2 + bx + b + c) e^x}$$

Partie 2x

A) Le point A' a pour coordonnées $(a, 0)$; son ordonnée étant de 0, il se trouve obligatoirement sur l'axe des abscisses.

Le point A a pour coordonnées $(a, f(a))$.

Les points A et A' ont la même abscisse.

L'aire du triangle OAA' peut donc s'écrire :

$$A_{OAA'} = \frac{[OA'] \times [A'A]}{2}$$

$$\boxed{A_{OAA'} = \frac{a \times f(a)}{2}}$$

Partie 3 :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^2 \left(e^x - \frac{e}{x} \right) - e + 4 \\
 &= x^2 e^x - x^2 \cdot \frac{e}{x} - e + 4 \\
 &= x^2 e^x - ex - e + 4
 \end{aligned}$$

$$1) \quad g'(x) = x(x+2)e^x - e$$

rappelons que $(x^2 e^x)' = x(x+2)e^x$, démontré en partie 1.

$$2) \quad g'(x) = (x^2 + 2x)e^x - e$$

$$g''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x$$

$$g''(x) = (2x+2+x^2+2x)e^x$$

$$g''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad &\text{Pour } x \in [0; +\infty[: \\
 &\quad e^x > 0 \quad (e^x \text{ est une fonction positive}) \\
 &\quad \text{et } x^2 + 4x + 2 > 0 \quad (\text{somme d'éléments positifs})
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } g''(x) = e^x (x^2 + 4x + 2) > 0$$

la fonction $g'(x)$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 4) \quad &\text{Calculons } g'(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x+2)e^x - e = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x+2)e^x = e
 \end{aligned}$$