

ÉTIQUETTE  
D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Rayer les mentions inutiles

Pour l'emploi de : Contrôleur Estane fip 2022

Épreuve n° : 2

Matière : Maths - 030

Date : 01/02/2022

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 3

#### À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

NOTE / 20

13,00

### Exercice 1

1) a) Étudier la limite de  $f$  en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} \quad (1)$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \infty$$

$$\text{On en déduit } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

c) On déduit des questions 1.a et 1.b que  $f$  possède une asymptote verticale en 0.

2) a)  $x^2$  et  $\ln(x)$  sont deux fonctions définies, continues et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .  
Ainsi  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme quotient de  $1 + \ln(x)$  et  $x^2$ .

On peut dériver  $f$  en utilisant la formule suivante

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\text{avec } u(x) = 1 + \ln(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x^2$$

$$v'(x) = 2x$$

$$\text{Ainsi : } f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x^2 - 2x(1 + \ln(x))}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x(1 + \ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} (1 - 2 - 2 \ln(x))$$

$$= \frac{1}{x^3} (-1 - 2 \ln(x))$$

Donc on a bien :  $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

b)  $-1 - 2 \ln(x) > 0$  (1)

(1)  $\Leftrightarrow -2 \ln(x) > 1$

(1)  $\Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2}$

(1)  $\Leftrightarrow x < e^{-1/2} \approx 0,606$   
Car la fonction exp est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  et comme ainsi l'inégalité.

Comme  $x > 0$ ,  $x^3 > 0$  aussi.

Ainsi le signe de  $f'$  dépend de celui de  $-1 - 2 \ln(x)$

On en déduit le tableau de signe suivant

$x$	0	$e^{1/2}$	$+\infty$
$f'$	0	+	0

c) D'après le tableau de variation de  $f$

$x$	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'$		+	-
$f$		$\nearrow$	$\searrow$
			0

$$\text{Avec } f(e^{-1/2}) = \frac{1 + \ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\ln(e)}{e^{-1/2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times 1}{e^{-1/2}}$$

$$= \frac{1}{2e^{-1/2}} \approx 1,359$$

3) a)  $f$  est une fonction continue et strictement croissante sur  $]0; e^{-1/2}]$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $f(e^{-1/2}) = \frac{1}{2e^{-1/2}} \approx 1,359$

$f$  étant strictement croissante de  $]0; e^{-1/2}]$  sur  $]-\infty; \frac{1}{2e^{-1/2}}]$ , il n'existe ainsi qu'un unique

$x_0 \in ]0; e^{-1/2}]$  tel que  $f(x_0) = 0$

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln(x_0)}{x_0^2} = 0 \quad (1)$$

$$0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x_0) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \ln(x_0) = -1$$

$$(1) \Leftrightarrow x_0 = e^{-1} = e^{-1}$$

$$(1) \Leftrightarrow x_0 = e^{-1} \approx 0,367$$

Le point d'intersection de la courbe  $C$  avec l'axe des abscisses est donc  $I(e^{-1}, 0)$ .

b) On en déduit le signe de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

$x$	0	$e^{-1}$	$+\infty$
$f$		- 0 +	

4) a)  $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$  est une primitive de  $f$

sur  $]0; +\infty[$

$$\text{Ainsi } I_2 = \int_{e^{-1}}^2 f(x) dx = \left[ F(x) \right]_{e^{-1}}^2$$

$$= F(2) - F(e^{-1})$$

$$= \frac{-2 - \ln(2)}{2} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{2}{e^{-1}} + \frac{(-1) \times \ln(e)}{e^{-1}}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{2}{e^{-1}} + \frac{1}{e^{-1}}$$

$$= -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-1}}$$

Comme  $-\frac{\ln(2)}{2} < 0$  on en déduit donc

$$0 < I_2 < e - \frac{1}{2}, \text{ en effet } \frac{1}{e^{-1}} = e$$



b) On peut calculer  $I_n$  ainsi :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx = \left[ F(x) \right]_{\frac{1}{e}}^n = F(n) - F\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

### Exercice 3

$$1) a - U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} = \frac{2U_n + 8 - 8 + 3}{U_n + 4}$$

$$= \frac{2(U_n + 4)}{U_n + 4} - \frac{5}{U_n + 4}$$

$$= 2 - \frac{5}{U_n + 4}$$

b) Initialisation :  $U_0 = 0$

On a donc pour  $n=0$  :  $0 \leq U_0 < 1$

On considère que jusqu'au rang  $n$ , on a :

$$0 \leq U_n < 1$$

Démontrons que cette relation est vraie au rang  $n+1$ .

Ainsi :  $U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq \frac{3}{4}$  ①

①  $\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{U_{n+1}}$  (car  $U_n \geq 0$  et  $U_{n+1} > 0$ )

①  $\Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq -\frac{5}{U_{n+1}}$ , en multipliant par  $-5$

①  $\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{5}{U_{n+1}}$

①  $\Leftrightarrow U_{n+1} \geq \frac{8-5}{4}$

①  $\Leftrightarrow U_{n+1} \geq \frac{3}{4}$

①  $\Leftrightarrow U_{n+1} \geq 0$

De plus :  $U_n < 1$  ②

②  $\Leftrightarrow 2U_n + 3 < 2 + 3$ , en multipliant par 2 et ajoutant 3

030

(pour les épreuves à option,  
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N° 1

ÉTIQUETTE  
D'IDENTIFICATION

$$\text{de plus } U_n < 1 \Leftrightarrow U_n + 4 < 5$$

Comme  $U_n + 4$  et sont positifs et bornés à 1  
on peut diviser membre à membre

$$(2) \Rightarrow \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} < \frac{5}{5}$$

$$(2) \Rightarrow U_{n+1} < 1$$

Conclusion On en conclut donc que la suite  
est bornée et on a bien

$$0 \leq U_{n+1} < 1$$

Par récurrence on peut donc dire que  
pour tout  $n$  entier la relation

$$0 \leq U_n < 1 \text{ est vraie.}$$

3) a) On admet que la suite  $(U_n)$  est  
croissante et d'après les résultats  
précédents  $(U_n)$  est bornée par 0 et 1

On peut donc en déduire que  $(U_n)$  est une  
suite convergente vers une limite  $l$ .

$$b) f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

$$\text{On en déduit que } f(U_n) = \frac{2U_n+3}{U_n+4} = U_{n+1}$$



$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \quad \therefore$$

Cherchons  $l$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{4}{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}$$

$$= 2$$

On en conclut que  $l = 2$ .

$$3) \quad V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$$

$$\text{On a } V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3}$$

$$= \left( \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - 1 \right) \times \frac{1}{\left( \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \right) + 3}$$

$$= \frac{2U_n + 3 - U_n - 4}{U_n + 4} \times \frac{U_n + 4}{2U_n + 3 + 3U_n + 12}$$

$$= \frac{U_n - 1}{5U_n + 15}$$

$$= \frac{1}{5} \times \left( \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \right)$$

$$= \frac{1}{5} V_n$$

On peut donc en conclure que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de

premier terme  $U_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 3} = -\frac{1}{3}$   
et

de raison  $q = \frac{1}{5}$

b)  $(U_n)$  est une suite géométrique, elle peut donc s'écrire sous cette forme

$$U_n = U_0 \times q^n$$

$$\text{soit } U_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Ainsi on a :

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n U_n - \left(\frac{1}{5}\right)^n = U_n - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow U_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n U_n = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$(3) \Leftrightarrow U_n \times \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$(3) \Leftrightarrow U_n = \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

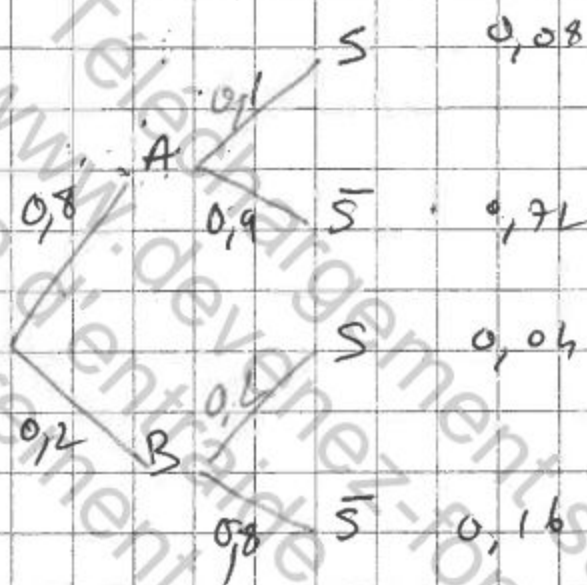
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 + 0] \times \frac{1}{1+0} = 1$$

Exercice 2

Date A: 1)



$$2) a) P(B \cap \bar{S}) = P(B) \times P(\bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$$

$$b) P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S})$$

$$\text{Comme } P(A \cap \bar{S}) = P(A) \times P(\bar{S}) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$$

$$P(\bar{S}) = 0,08 + 0,16 = 0,24$$

$$3) \text{ On cherche } P_S(B)$$

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{Or } P(S \cap B) = P(B \cap S) = P(B) \times P_S(B)$$

$$= 0,2 \times 0,2$$

$$= 0,04$$

030

(pour les épreuves à option,  
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N° 2

ÉTIQUETTE  
D'IDENTIFICATION

$$\text{Ainsi : } P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{0,04}{0,2} = 0,2$$

la probabilité que cette carte provienne de  
famille B est 0,2.

Partie B : La variable  $X$  suit une loi

binomiale car le tirage avec remise des 10  
cartes correspond à un tirage qui se répète  
10 fois.

On pose de probabilité réussie,  $p = P(S)$   
soit  $p = 0,2$

$$\text{Ainsi : } P(X=10) = \binom{10}{0,2} (0,2)^0 (0,8)^{10}$$

Suite  $\Rightarrow$



Exercice 4 a) Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés

$$\text{On a : } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{AB} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{BC} \begin{pmatrix} +1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires cela signifie qu'il existe un réel  $a$  tel

$$\vec{AB} = a \times \vec{BC} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 1 = a \times 1 \\ -1 = a \times (-4) \\ -1 = a \times (-2) \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} a = 1 \\ a = 1/4 \\ a = 1/2 \end{cases} \quad \text{Ce qui est impossible}$$

$\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  ne sont donc pas colinéaires  
Ce qui signifie que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Si D est orthogonal au plan (ABC)  
alors  $\vec{u}$  est orthogonal à  $\vec{AB}$  et  
à  $\vec{BC}$

$$\text{Calculons } \vec{AB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \times 1 + 1 - 3$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul } \vec{BC} \cdot \vec{u} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2 - i + 3j) \\ &= 2 + 4 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On veut démontrer que le vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $\Delta$  est orthogonal aux deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  du plan (ABC).

Donc  $\Delta$  est orthogonal au plan (ABC).

b) On peut donc en deduire une équation cartésienne du plan (ABC):

$$2x - y + 3z + d = 0 \quad \text{avec } d \text{ un réel}$$

Comme A appartient au plan, ses coordonnées remplacent l'équation:

$$\text{On a donc } 2 \times 0 - 1 + 3 \times 1 + d = 0$$

$$\text{soit } d = -1$$

Ainsi l'équation cartésienne du plan (ABC) est

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

c) Comme  $\Delta$  passe par D une équation paramétrique de  $\Delta$  est

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

d) Si  $H$  est l'intersection de  $D$  et d'un plan (ABC) alors ses coordonnées vérifient ce système.

$$\begin{cases} x_H = 7 + 2t \\ y_H = -1 - t \\ z_H = 4 + 3t \end{cases}$$

$$2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow 14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow 14t + 28 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow t = \frac{-28}{14}$$

$$(1) \Leftrightarrow t = -2$$

$$\begin{cases} x_H = 7 + 2 \times (-2) = 7 - 4 = 3 \\ y_H = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \\ z_H = 4 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2 \end{cases}$$

Donc :  $H(3; 1; -2)$

3) a)  $\vec{v}(1; 1; 1)$  est le vecteur normal de  $P_1$ ,

$\vec{w}(1; 4; 0)$  est celui de  $P_2$

~~Calculons  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 0 = 1 + 4 = 5 \neq 0$~~

~~Les deux vecteurs ne sont pas~~

Si  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas sécantes alors leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

030

(pour les épreuves à option,  
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N°

ÉTIQUETTE  
D'IDENTIFICATION

$\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires signifie qu'il existe un réel  $a$  tel que  $\vec{v} = a \vec{w}$

$$\vec{v} = a \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \times 1 \\ 1 = a \times 4 \\ 1 = a \times 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{4} \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui est faux}$$

On en conclut que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas colinéaires.

Donc les plans  $P_1$  et  $P_2$  ne se coupent pas.

b) d'après les coordonnées de  $P_1$  et  $P_2$  on vérifie les équations des deux plans

$$2x + 4y + z = 0$$

$$2x + 4y + z = 0$$

suit  $\Rightarrow$



c) la droite  $d$ , a pour vecteur directeur  $\vec{u}'(-4; 1; 3)$

$$\begin{aligned} \text{Calcul: } \vec{u} \cdot \vec{u}' &= 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 \\ &= -8 - 1 + 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont deux vecteurs orthogonaux.

On peut donc conclure avec ce vecteur et le vecteur de la droite  $l$  que

la droite  $d$  et la plan (ABC) sont parallèles.

Donc (d)