

Merci à anonyme1 pour le partage
de sa copie sur le site
devenez-fonctionnaire.Fr

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

A compléter par le candidat

Rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)

Rayer les mentions inutiles

FIP 2^{ème} CLASSE

Pour l'emploi de : Contrôleur des finances publiques

Preuve n° : 2 030

Matière : MATHÉMATIQUES - 030

Date : 01/02/2022

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 1

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être
strictement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel
que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute
autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au
stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement.
Toute autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le
jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation
du crayon surligneur est interdite.

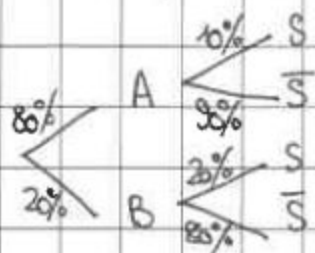
Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à
l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées
dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la
commission de surveillance.

NOTE / 20
15,00

Exercice 2:

PARTIE A:

1. L'arbre pondéré qui traduit l'énoncé est:



2. a. $P(B \cap S) = 20\% \times 80\%$

$$P(B \cap S) = 0,16$$

b. Les événements A et B forment une partition de l'univers Ω , d'après la loi des probabilités totales:

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S})$$

$$P(\bar{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8$$

$$P(\bar{S}) = 0,88$$

3. D'après la formule des probabilités conditionnelles

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

$$P_S(B) = \frac{0,2 \times 0,2}{0,12}$$

$$P_S(B) = \frac{1}{3} = 0,33 \quad (\text{au centième près})$$

PARTIE B:

1. X est la variable aléatoire représentant le nombre de prélèvements

sans pesticides comptabilisés lors d'un tirage sans remise de 10 boites. L'expérience suit un schéma de Bernoulli.

X suit donc une loi binomiale de paramètre (n, p) avec $n = 10$ et $p = 0,88$.

$$X \rightarrow (B(10, 0,88))$$

$$2. P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot (0,88)^0 \cdot (0,22)^{10}$$

$$P(X=0) = 0,28$$

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

$$a) u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \Leftrightarrow u_{n+2} = \frac{2u_n + 8 - 5}{u_n + 4}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2(u_n + 4)}{u_n + 4} - \frac{5}{u_n + 4}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Soit $P(n)$ la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}, : 0 \leq u_n < 1$

Initialisation : $P(0) : 0 \leq u_0 = 0 < 1$

P est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie (au rang n)

$$0 \leq u_n < 1$$

$$\Rightarrow 4 \leq u_n + 4 < 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{u_n + 4} > \frac{1}{5} \quad (\text{fonction inverse décroissante})$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{5}{u_n + 4} < 2 - 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{4} \leq u_{n+1} < 1$$

$$\text{On a donc } 0 \leq u_{n+1} < 1$$

$P(n+1)$ est donc vraie lorsque $P(n)$ l'est.

D'après le principe de récurrence, $0 \leq u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. a) (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

b) Soit l sa limite.

$$\text{Quand } n \rightarrow \infty, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} = u_n$$

$$\text{donc } u_{n+1} = f(l) = l$$

$$\frac{2l+3}{l+4} = l \Rightarrow 2l+3 = l^2+4l$$

$$\Rightarrow l^2 + 2l - 3 = 0$$

La résolution du polynôme donne deux solutions $S = \{l_1 = 1; l_2 = -3\}$

$0 \leq u_{n+1} < 1$ implique que la seule solution acceptable soit 1.

$$l = 1.$$

la limite de la suite (u_n) quand $n \rightarrow \infty$ est donc $l = 1$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

$$a) \quad u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 4}}{\frac{5u_n + 15}{u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} \times \frac{u_n + 4}{u_n + 4}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

on est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = \frac{-1}{3}$.
 $(u_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{-1}{3})$.

$$b. \text{ On a } u_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\text{Comme } u_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$\Rightarrow u_n (u_n + 3) = u_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n (u_n - 1) = -3u_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-3u_n - 1}{u_n - 1}$$

$$\text{On obtient : } u_n = \frac{3u_n + 1}{1 - u_n}$$

$$u_n = \frac{3 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}$$

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5} < 1$. Elle a donc pour limite, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$$\text{Par suite } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n + 1}{1 - u_n} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{On a bien } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l = 1.$$

Exercice 4 :

$$1. \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{AB} = k\vec{AC} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2k = 1 \\ -5k = -1 \\ -3k = -1 \end{cases}$$

le système d'équation n'a pas de solution.

\vec{AC} et \vec{AB} ne sont donc pas colinéaires. A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) \vec{AB} et \vec{AC} n'étant pas colinéaires, ils forment le plan (ABC) (contenant le point A).

$$\text{On a } \vec{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$$

De même, $\vec{AC} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 5 - 9 = 0$

\vec{u} est normal à au moins 2 vecteurs du plan (ABC).
La droite Δ de vecteur directeur \vec{u} est donc orthogonale au plan.

b) \vec{u} étant normal au plan (ABC), une équation est donnée par :
 $2x - y + 3z + d = 0$

Or $A \in \text{plan(ABC)}$: $2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0$
 $\Rightarrow d = 1.$

$2x - y + 3z + 1$ est donc une équation cartésienne du plan (ABC).

c) \vec{u} est un vecteur directeur de Δ et Δ passe par D. on a donc

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$
 comme représentation paramétrique de la droite Δ .

d) $H \in \Delta$ et au plan ABC. $H(x_H, y_H, z_H)$ vérifie donc les équations :

$$\begin{cases} 2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0 \\ x_H = 2t + 7 \\ y_H = -t - 1 \\ z_H = 3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow 4t + 14 - t + 1 + 9t + 12 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 14t = -28 \quad \text{et} \quad t = -2.$$

$$\begin{cases} x_H = -4 + 7 \\ y_H = 2 - 1 \\ z_H = -6 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 1 \\ z_H = -2 \end{cases}$$

$$H = (3, 1, -2)$$

030

(pour les épreuves à option,
indiquer le sujet traité)

INTERCALAIRE N° 1

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

$$3) \quad P_1: x+y+z=0$$

$$P_2: x+4y+2z=0$$

Les vecteurs normaux \vec{n}_1 et \vec{n}_2 respectivement aux plans P_1 et P_2 sont :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs ne sont pas proportionnels (immédiat).

Ils ne sont donc pas colinéaires. Deux vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2 n'étant pas colinéaires, les plans P_1 et P_2 ne peuvent être parallèles. Ils sont donc sécants.

b) Soit $M \in P_1 \cap P_2$. Les points de la droite d'intersection d_1 respectant les équations.

$$\begin{cases} x_M + y_M + z_M = 0 \\ x_M + 4y_M + 2z_M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -4y_M - 2 \\ z_M = -x_M - y_M = 3y_M - 2 \end{cases}$$

Les points de la droite d_1 sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur directeur de la droite d est $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal au plan est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, la droite d et le plan sont donc sécants.

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$, définie sur $]0, +\infty[$.

la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$ est le quotient des limites de $1 + \ln x$ par x^2 .

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln x = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée des fonctions $(\ln x)$ et x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = 0$$

c) On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ la droite $x=0$ est asymptote à la courbe (verticale) à l'origine

et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe à l'infini.

2. a) $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ est continue et dérivable sur son ensemble de définition $D_f:]0, +\infty[$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ où $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ v = x^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x \end{cases}$.

$$f'(x) = \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$$

b. $-1 - 2 \ln(x) > 0 \Rightarrow -1 > 2 \ln x$
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} > \ln x$

$$\Rightarrow e^{-1/2} > e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow x < e^{-1/2}$$

c. la fonction $\frac{1}{x^3}$ étant toujours positive sur \mathbb{R}_+^* , $f'(x)$

a le même signe que $-1 - 2 \ln(x)$.

| x | 0 | e^{-1} | $e^{-1/2}$ | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|----------|------------|-----------|
| $-1 - 2 \ln x$ | | + | 0 | - |
| $\frac{1}{x^3}$ | | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $e^{-1/2}$ | 0 |

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1 + \ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^2}$$

$$f(e^{-1/2}) = \frac{e^{-1}}{2}$$

3. a) la courbe \mathcal{C} intersecte l'axe des abscisses au point x_1 tel que $f(x_1) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1 + \ln x_1}{x_1^2} = 0 \Rightarrow 1 + \ln x_1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-1} = x_1$$

Ce point est unique par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f croissante sur $]0, e^{-1/2}]$ et dont les limites sont $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $f(e^{-1/2}) = e$.

Il ne peut avoir d'autre point tel que $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[e^{-1/2}, +\infty[$ car la fonction est décroissante (monotone) et sa limite est 0.

b) $f(x)$ est donc négative sur $]0, e^{-1}]$ et positive sur $[e^{-1}, +\infty[$.

$$4) a) I_n = \int_{1/e}^n \frac{1+\ln x}{x} dx = \left[\frac{-2-\ln x}{x} \right]_{1/e}^n = \frac{-2-\ln n}{n} - \frac{-2-\ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$I_n = \frac{-2-\ln n}{n} + \frac{(1+1)}{e^{-1}} \Rightarrow I_n = \frac{-2-\ln n}{n} + e^1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2-\ln n}{n} + e^1 = e^1$$

$$(\text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0)$$

$$a) I_2 = \frac{-2-\ln 2}{2} + e.$$

$$\begin{aligned} \ln 2 + 2 &> 2 \Rightarrow -2 > -(\ln 2 + 2) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} &> \frac{-\ln 2 - 2}{2} \Rightarrow e - \frac{1}{2} > \frac{-\ln 2 - 2}{2} = I_2 \end{aligned}$$

$$\text{On obtient } I_2 < e - \frac{1}{2}.$$

I_2 est l'aire comprise sous la courbe de f positive sur $[e^{-1}, 2]$

$I_2 > 0$. On a donc

$$0 < I_2 < e - \frac{1}{2}.$$