

Merci à yarngane
membre du site devenez-fonctionnaire.fr
pour le partage de sa copie

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat

Attente le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Cours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel ⁽¹⁾

Rayer les mentions inutiles

..... externe

Sur l'emploi de : .. Contrôleur des Finances Publiques ..

Numéro : 2

Matière : 030 Mathématiques

Code : 0111220202

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 2

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être
strictement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel
que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute
autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire avec
un stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement.
Toute autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le
jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation
d'un crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codées à barres, destinées à permettre à
l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées
sur les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la
commission de surveillance.

NOTE / 20
11,50

Le vecteur de la droite D est un vecteur
plan P. Les coordonnées sont $(-1; 1; -3)$.

Les solutions sont possibles :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -3-3t \end{cases}$$

Le point S permettant de trouver un
système d'équations des droites.

pas possible.
vérifier ce système.

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-1=t \\ z-3=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=t \\ y-1=t \\ -1=t \end{cases}$$

Le système

de la droite D est

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = -3-3t \end{cases}$$

droite D et au plan P. On vérifie quelle

$$B: \frac{6}{5} - \frac{9}{5} - 3 \times \left(\frac{3}{5} \right) + k = \frac{26}{5}$$

$$A: \frac{8}{11} - \frac{25}{11} - 3 \times \frac{9}{11} + k = 0$$

Exercice 5

1.

Un vecteur directeur de la droite D est un vecteur normal au plan P . Les coordonnées sont $(1; 1; -3)$.

Deux propositions sont possibles :

$$B \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad D \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

On vérifie si les coordonnées du point S permettent de trouver un réel unique t qui vérifie les trois équations des systèmes.

$$\text{Pour } B : \begin{cases} 1 = 2 + t \\ 2 = -1 + t \\ 0 = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{n'est pas possible.}$$

Il n'existe pas de réel t qui vérifie ce système.

$$\text{Pour } D : \begin{cases} 1 = 2 + t \\ -2 = -1 + t \\ 0 = -3 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ 3 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ -1 = t \end{cases}$$

Il existe un réel t qui vérifie ce système.

Une représentation paramétrique de la droite D est

$$\begin{aligned} & \text{proposition } D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \end{aligned}$$

2.

Le point H appartient à la droite D et au plan P . On vérifie quelle proposition résout les équations.

Pour le plan P :

$$A : -4 + 0 - 3 \times 0 + 4 = 0$$

$$B : \frac{6}{5} - \frac{9}{5} - 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 = \frac{26}{5}$$

$$C : \frac{7}{9} - \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} + 4 = \frac{28}{9}$$

$$D : \frac{8}{11} - \frac{25}{11} - 3 \times \frac{9}{11} + 4 = 0$$

Les propositions A et B sont possibles.

On vérifie avec la représentation paramétrique de D.

Pour A :
$$\begin{cases} -4 = 2+t \\ 0 = -1+t \\ 0 = -3-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6=t \\ 1=t \\ 3=-3t \end{cases}$$
 IP n'existe pas de réel t qui vérifie ce système.

Pour B :
$$\begin{cases} 8 = 2+t \\ 11 \\ -25 = -1+t \\ 11 \\ 9 = -3-3t \\ 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14=t \\ 11 \\ -14=t \\ 11 \\ 14=-3t \\ 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14=t \\ 11 \\ 14=t \\ 11 \\ 14=t \\ 11 \end{cases}$$

IP existe un réel t qui vérifie ce système.

La proposition B vérifie les deux systèmes.

Les coordonnées du point H sont

proposition B : $\left(\frac{8}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{9}{11} \right)$

Exercice 4

Partie 1

a) $\ln(x^2) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$
par continuité de la fonction exponentielle

b) $\ln|x^2-1| = 1 \Leftrightarrow e^{\ln|x^2-1|} = e^1 \Leftrightarrow |x^2-1| = e$

c) $\ln(x^2-1) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x^2-1)} = e^1 \Leftrightarrow x^2-1 = e \Leftrightarrow x = \sqrt{e+1}$
car la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

Partie 2

1. a)

On développe l'expression $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

$$P(x) = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c$$

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

On sait que $P(x) = 2x^3 - 13x^2 - 10x + 21$

d'où $2x^3 - 13x^2 - 10x + 21 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

On en déduit que $a = 2$ et $c = -21$.

Il reste $b - a = -13 \Leftrightarrow b - 2 = -13 \Leftrightarrow b = -11$

et $c - b = -10 \Leftrightarrow -21 - b = -10 \Leftrightarrow b = -11$

Les réels a, b, c sont

$a = 2$ $b = -11$ et $c = -21$

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 11x - 21) = 0$

On peut déjà déterminer une solution pour le premier terme du produit
 $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Pour le deuxième terme du produit,
 $2x^2 - 11x - 21 = 0$

$$\Delta = (11)^2 - 4 \times 2 \times (-21) = 289$$

Il y a deux racines pour ce polynôme.

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{289}}{4}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{11 - \sqrt{289}}{4}$$

$$x_1 = \frac{11 + 17}{4} = 7$$

$$\text{et } x_2 = \frac{11 - 17}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $P(x) = 0$ sont $\left\{-\frac{3}{2}; 1; 7\right\}$.

2. a)

Dans ce cas les solutions de l'équation vérifient

$$\ln(x) = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 7$$

$$\ln(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{e}{\sqrt{e}}$$

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\ln(x) = 7 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^7 \Leftrightarrow x = e^7$$

Les solutions de l'équation sont $\left\{ \frac{e}{\sqrt{e}} ; e ; e^7 \right\}$.

Exercice 2

1. a)

$$u_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

u_1	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{2}{3}$
u_3	$\frac{3}{4}$

b) $v_0 = 0$

$$v_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = \frac{2}{3}$$

$$v_3 = \frac{3}{4}$$

$w_0 = u_0$

$w_1 = u_1$

$w_2 = u_2$

$w_3 = u_3$

Les quatre premières termes des deux suites sont égaux.

c)

Initialisation : $u_0 = 0 = w_0$

La propriété est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence : il existe un entier naturel k tel que $u_k = w_k$

Hérédité :

$$w_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - w_k}$$

par hypothèse de récurrence

$$u_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2(k+1) - k}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{2k+2 - k}$$

$$\text{d'où } u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} = w_{k+1}$$

L'hypothèse est vraie au rang 0 et héréditaire par la suite.

Par tout entier naturel n $u_n = w_n$

2.

$$a) \quad v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{6}{24}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$$

$$\underline{v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4}$$

$$b) \quad \underline{S_n = -\ln(n+1)}$$

limite en l'infini de S_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\infty$$

$$\text{D'au} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

Exercice 1

Partie A

a) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} telle que $g(x) = x$
 Sur l'intervalle $[1; 2]$, la fonction g est strictement croissante
 et positive.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante d'au

$$\ln(2) > \ln(1). \text{ Puisque } \ln(1) = 0 \text{ alors } \ln(2) > 0$$

La fonction logarithme népérien est strictement positive sur $[1; 2]$.

$$\text{D'au} \quad 1 > 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0, \text{ sur } [1; 2]$$

On en déduit que $f(x) = 1 + x \ln x$ est positive sur l'intervalle
 $[1; 2]$.

b) La droite (TN) passe par les points de coordonnées

$$M(1; f(1))$$

$$N(2; f(2))$$

$$M(1; 1)$$

$$N(2; 1 + 2 \ln(2))$$

Le coefficient directeur de la droite est

$$\frac{1 + 2 \ln(2) - 1}{2 - 1} = \frac{2 \ln(2)}{1} = 2 \ln(2)$$

Le coefficient directeur de (TN) est $2 \ln(2)$.

d) La tangente (T) à (C_f) au point E est parallèle à la droite (TN).
 Elles ont donc le même coefficient directeur.

La droite (T) a une équation de la forme $y = ax + b$
avec, ici, $a = 2 \ln(2)$

E appartient à (C_f) et à (T), ses coordonnées résolvant les deux équations.

$$E \left(\frac{4}{e} ; 1 + \frac{4}{e} \times \ln\left(\frac{4}{e}\right) \right)$$

Il a

$$1 + \frac{4}{e} \times \ln\left(\frac{4}{e}\right) = 2 \ln(2) \times \frac{4}{e} + b$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{e} \times \ln\left(\frac{4}{e}\right) - 2 \ln(2) \times \frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{e} \left(\ln\left(\frac{4}{e}\right) - 2 \ln(2) \right)$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{e} \left(\ln(4) - \ln(e) + 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{e} \left(\ln(4) - 1 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{e} \left(\ln(4) - 1 - \ln(4) \right)$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - \frac{4}{e}$$

Une équation de (T) est $y = 2 \ln(2)x - \frac{4}{e} + 1$

2. a) Sur l'intervalle $[1; 2]$ la fonction f est continue et dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

De même l'expression $\left(2 \ln(2)x - \frac{4}{e} + 1 \right)$ est dérivable sur

$[1; 2]$

Soit g la fonction dérivée de g .

$$g(x) = 1 + x \ln x - \left(2 \ln(2)x - \frac{4}{e} + 1 \right)$$

$$g(x) = 1 + x \ln(x) - 2 \ln(2)x + \frac{4}{e} - 1$$

$$g(x) = x \ln(x) - 2 \ln(2)x + \frac{4}{e}$$

$$g(x) = x (\ln x - 2 \ln(2)) + \frac{4}{e}$$

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x) - 2 \ln(2)$
 $u'(x) = 1$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

et on obtient

$$g'(x) = \frac{x}{x} + \ln(x) - 2 \ln(2)$$

$$g'(x) = 1 + \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$$

Sur l'intervalle $[1; 2]$, $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

b) On vérifie si $g'(x)$ s'annule et change de signe sur $[1; 2]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{x}{4}\right)} = e^{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{4}{e}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{e}$$

Tableau de variations de g sur $[1; 2]$

x	1	$\frac{4}{e}$	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\ln(1) + \frac{4}{e}$	$\rightarrow 0$	$\ln(2) + \frac{4}{e}$

$$g(1) = -2 \ln(2) + \frac{4}{e} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{e}$$

$$g(2) = 2 \ln(2) - 4 \ln(2) + \frac{4}{e} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{e}$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = 1 + \frac{4}{e} \ln\left(\frac{4}{e}\right) - \left(2 \ln(2) \times \frac{4}{e} - \frac{4}{e} + 1\right)$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = 1 + \frac{4}{e} \ln\left(\frac{4}{e}\right) - \frac{8}{e} \ln(2) + \frac{4}{e} - 1$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e} \left(\ln\left(\frac{4}{e}\right) - 2 \ln(2) + 1 \right)$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e} \left(\ln\left(\frac{4}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 1 \right)$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e} \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 \right)$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e} (1 - \ln(e))$$

$$g\left(\frac{4}{e}\right) = 0$$

Sur $\left[1, \frac{4}{e}\right]$, \mathcal{E}_f est au-dessus de (T) .

Sur $\left]\frac{4}{e}, 2\right]$, \mathcal{E}_f est au-dessus de (T) .

En $x = \frac{4}{e}$, \mathcal{E}_f et (T) se touchent.

3.

Coordonnées des points :

$$P(1; 0)$$

$$Q(2; 0)$$

$$M(1; 1)$$

$$N(2; 1 + 2 \ln(2))$$

$$M'(1; 2 \ln(2) - \frac{4}{e} + 1)$$

$$N'(2; 4 \ln(2) - \frac{4}{e} + 1)$$

a) aire du trapèze $PNQP$ (A_1)

$$A_1 = PQ \times \frac{PM + QN}{2}$$

$$PQ = 1 \quad PQ = 1 \quad QN = 1 + 2 \ln(2)$$

$$A_1 = 1 \times \frac{1 + 1 + 2 \ln(2)}{2} = \frac{2 + 2 \ln(2)}{2} = \ln(2)$$

L'aire du trapèze $PQNP$ est de $\ln(2)$ unités d'aire.

Aire du trapèze $P'N'PQ$ (A_2)

$$A_2 = PQ \times \frac{PN' + QN'}{2}$$

$$PN' = 2 \ln(2) - \frac{4}{e} + 1$$

$$QN' = 4 \ln(2) - \frac{8}{e} + 1$$

$$A_2 = 1 \times \frac{2 \ln(2) - \frac{4}{e} + 1 + 4 \ln(2) - \frac{8}{e} + 1}{2}$$

$$A_2 = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{4}{e} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{4}{e} + 2}{2}$$

$$A_2 = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{8}{e} + 2}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{8}{e} + \frac{2}{2}$$

$$A_2 = -\ln(\sqrt[3]{8}) - \frac{4}{e} + 1$$

L'aire du trapèze $P'N'PQ$ est de $-\ln(\sqrt[3]{8}) - \frac{4}{e} + 1$ unités d'aire.

b) A la calculatrice on obtient (en unités d'aire)

$$A_1 \approx 0,7 \quad \text{et} \quad A_2 \approx 0,22$$

$$0,22 \leq A \leq 0,22$$

Partie B

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$
 $u'(x) = 2x$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

Soit $V'(x)$ la dérivée de $V(x)$

$$V'(x) = \frac{1}{2} (2x \ln x + x) - \frac{1}{4} \times 2x$$

$$V'(x) = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\underline{V'(x) = x \ln(x)}$$

Puisque $V(x)$ se dérive en $V'(x)$, alors $V(x)$ est une
 primitive de $V'(x) = x \ln x$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[x^2 \frac{\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{4 \ln 2}{2} - \frac{4}{4} - \left(\frac{1 \ln 1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2 \ln 2 - \frac{3}{4}}}$$

$$2. \quad A = \int_1^2 f(x) \, dx = \int_1^2 1 + x \ln(x) \, dx$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x} + V'(x) dx$$

$$A = \left[\ln(x) \right]_1^2 + 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

$$A = 2 - 1 + 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

$$A = 2 \ln(2) + \frac{1}{4} \text{ unités d'aire}$$

Exercice 3

2. a)

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire se calcule

grâce à la formule $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

avec p_i : probabilité que la variable X prenne la valeur x_i

et x_i : les différentes valeurs possibles pour la variable X .

1 loi de probabilité de X

X_i	0	1
$p(X_i)$	$1-p$	p