

Merci à anonyme 4
membre du site devenez-fonctionnaire.fr
pour la partage de sa copie

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat

Rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Candidat : concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel ⁽¹⁾

Rayer les mentions inutiles

Type : externe
Pour l'emploi de : inspecteur des finances publiques

Preuve n° : 2

Matière : mathématiques

Date : 2 2 1 1 2 0 2 2

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 2

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être
strictement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel
que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute
autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au
stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement.
Toute autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le
jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation
du crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à
l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées
dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la
commission de surveillance.

NOTE / 20
19,50

Exercice 1:

1) Dans le triangle AHC rectangle en H on a,
d'après le théorème de Pythagore :

$$b^2 = AH^2 + h^2 \quad (1)$$

Dans le triangle HBC rectangle en H on a,
d'après le théorème de Pythagore :

$$a^2 = HB^2 + h^2 \quad (2)$$

En soustrayant (1) de (2) on obtient : $h^2 = b^2 - AH^2$

en remplaçant dans (2) on a : $a^2 = HB^2 + b^2 - AH^2$

De plus dans AHC rectangle en H : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{b}$

d'où $AH = b \cos(\widehat{BAC})$

De plus $HB^2 = (c - AH)^2 = c^2 - 2c \times AH + AH^2$

Enfin : $a^2 = HB^2 + h^2 - AH^2$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 - 2cb \cos(\widehat{BAC}) + AH^2 + b^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow \underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})}$$

2) On a : $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$

On d'après la relation d'Al-Kashi, en considérant que $b \neq 0$
et $c \neq 0$: $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$ (*)

$$\left(\text{De plus, } \frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}} = \tan \widehat{BAC} = \frac{h}{c} \right)$$

$$\text{De (*) on a : } 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} \right)^2$$

$$1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = \frac{4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4)}{4b^2c^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = \frac{-(a^4 + b^4 + c^4) + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2b^2a^2}{4b^2c^2}$$

Donc, l'angle \widehat{BAC} étant compris dans l'intervalle $]0; 90[$,

on a : $\sin \widehat{BAC} > 0$ et $\sqrt{4b^2c^2} = |2bc| = 2bc$ car $b > 0$ et $c > 0$.

d'où :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2bc}$$

3) d'où $\frac{a}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{2abc}{\sqrt{2(b^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}$

De la même façon les valeurs a, b et c étant permutable dans la preuve, on a :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2ac}$$

$$\text{d'où } \frac{b}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{2abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}$$

$$\text{et } \sin \widehat{ACB} = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2ab}$$

$$\text{d'où } \frac{c}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{2abc}{\sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}$$

$$\text{On a bien } \frac{a}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{b}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{c}{\sin \widehat{ACB}}$$

4) L'aire \mathcal{A} du triangle ABC est $\overset{\text{donnée par}}{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} c \times h$

On $h = b \sin \widehat{BAC}$ d'où :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times c \times b \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

$$\text{On a : } p - a = \frac{b+c-a}{2} ; p - b = \frac{a+c-b}{2} ; p - c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } p(p-a)(p-b)(p-c) &= \frac{1}{16} (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\ &= \frac{1}{16} ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (c-b)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} (a^2(b+c)^2 - (b+c)^2(c-b)^2 - a^4 + a^2(c-b)^2) \\ &= \frac{1}{16} (a^2(b^2+c^2+2bc + c^2+b^2-2bc) - a^4 - (c^2-b^2)^2) \\ &= \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4) \\ 2) \text{ on } \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \\ \Rightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 3

1) On a:
$$\frac{(x^5+x^4+2x^3-4)(x^4-2x^3+4x-4) - (x-1)(x^8-16)}{(x^8-16)(x^4-2x^3+4x-4)} (*)$$

On:
$$\begin{aligned} &(x^5+x^4+2x^3-4)(x^4-2x^3+4x-4) \\ &= x^9 - 2x^8 + 4x^6 - 4x^5 + x^8 - 2x^7 + 4x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 4x^6 + 8x^4 - 8x^3 \\ &\quad - 4x^4 + 8x^3 - 16x + 16 \\ &= x^9 - x^8 - 16x + 16 \end{aligned}$$

De plus:
$$(x^8-16)(x-1) = x^9 - x^8 - 16x + 16$$

Ainsi:
$$(*) = \frac{x^9 - x^8 - 16x + 16 - (x^9 - x^8 - 16x + 16)}{(x^8-16)(x^4-2x^3+4x-4)} = 0$$

On a bien:
$$\frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} = \frac{x-1}{x^4-2x^3+4x-4}$$

2) On a:
$$\begin{aligned} &(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^3 + 4\sqrt{2} - 4 = 4 - 2 \times 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4 = 0 \\ &\text{et } (-\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^3 + 4 \times (-\sqrt{2}) - 4 = 2 + 2 \times 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$ sont des racines de P.

3) $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ étant des racines de P , P s'écrit de la

$$\text{forme } P = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(ax^2 + bx + c)$$

$$\text{car } \deg P = 4$$

$$\text{On } (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(ax^2 + bx + c) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^4 + bx^3 + (c - 2a)x^2 - 2bx - 2c$$

En identifiant les coefficients des monômes et par unicité de l'écriture développée, on a le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c - 2a = 0 \\ -2b = 4 \\ -2c = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } P = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 - 2x + 2)$$

Or le discriminant de $x^2 - 2x + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$,
 $x^2 - 2x + 2$ est irréductible sur $\mathbb{R}[x]$.

Ainsi : P s'écrit sous forme factorisée en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[x]$:

$$P = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 - 2x + 2)$$

4) La partie entière de $\frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$ est nulle et les pôles sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, qui sont des pôles simples

La décomposition en éléments simples de $\frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$ est donc de

la forme: $\frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}} + \frac{cx+d}{x^2-2x+2}$

On a: $\frac{(x-1)(x-\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = a + \frac{b(x-\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} + \frac{(cx+d)(x-\sqrt{2})}{x^2-2x+2}$

donc: $\frac{x-1}{(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = a + \frac{b(x-\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} + \frac{(cx+d)(x-\sqrt{2})}{x^2-2x+2}$

On évalue en $\sqrt{2}$:

$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})} = a$ d'où $a = \frac{\sqrt{2}-1}{(2\sqrt{2})^2(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{8}$

On a de même en multipliant par $x+\sqrt{2}$:

$\frac{x-1}{(x-\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = \frac{a(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} + b + \frac{(cx+d)(x+\sqrt{2})}{x^2-2x+2}$

On évalue en $-\sqrt{2}$:

$\frac{-(\sqrt{2}+1)}{-2\sqrt{2}(2+2\sqrt{2}+2)} = b$ d'où $b = \frac{\sqrt{2}+1}{(2\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{8}$

On multiplie par x puis on détermine la limite quand x tend vers $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)x}{(x-\sqrt{2})(x^2-2x+2)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} \times x = \frac{1}{8}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} \times x = \frac{1}{8}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(cx+d)x}{x^2-2x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{(c + \frac{d}{x})}{(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})} = c$

Par unicité de la limite on a l'égalité:

$0 = 2 \times \frac{1}{8} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$

On a:

$$\left(\frac{1}{8(x-\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + \frac{1}{4} \frac{(-x+2)}{x^2-2x+2} \right)$$

On évalue en 1 on obtient l'égalité :

$$\frac{0}{-1} = \frac{1}{8(1-\sqrt{2})} + \frac{1}{8(1+\sqrt{2})} - \frac{\frac{1}{4} + d}{1}$$

$$\text{d'où } -\frac{1}{4} + d = \frac{-(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})}{8(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$$

$$\frac{-\frac{1}{4} + d}{1} = \frac{-2}{8(1-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ d'où } d = \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\frac{x-1}{x^4-2x^3+4x-4} = \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + \frac{-x+2}{4(x^2-2x+2)}$$

5) d'après l'égalité obtenue en 1 on a :

$$\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} dx = \int_0^1 \frac{x-1}{x^4-2x^3+4x-4} dx$$

et d'après la décomposition en éléments simples de la question 4 :

$$\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} dx = \int_0^1 \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} dx + \int_0^1 \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} dx + \int_0^1 \frac{-x+2}{4(x^2-2x+2)} dx$$

On pose $x \in [0, 1]$, $x-\sqrt{2} < 0$ d'où :

$$\int_0^1 \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} dx = \int_0^1 \frac{1}{8(\sqrt{2}-x)} dx = \left[-\frac{1}{8} \ln(\sqrt{2}-x) \right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} dx = \left[\frac{1}{8} \ln(x+\sqrt{2}) \right]_0^1$$

ETIQUETTE
D'IDENTIFICATION

$$\text{et : } \int_0^1 \frac{-x+2}{4(x^2-2x+2)} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{8} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{4} \frac{2}{(x-1)^2+1} \right) dx$$

On $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$ donc :

$$\int_0^1 -\frac{1}{8} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = \left[-\frac{1}{8} \ln(x^2-2x+2) \right]_0^1$$

~~$$\text{Plus : } \int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} dx = \left[\frac{1}{8} \ln(\sqrt{2}-x) + \frac{1}{8} \ln(x+\sqrt{2}) - \frac{1}{8} \ln(x^2-2x+2) \right]_0^1$$~~

~~$$\left[\frac{1}{8} \ln \left(\frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x^2-2x+2} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{8} \ln \frac{1}{1} - \frac{1}{8} \ln \frac{2}{2} = 0$$~~

Votre dernier feuillet

Exercice 4

1) La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

D'après la formule de Taylor-Young pour f de classe \mathcal{C}^n on a :
$$f(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (h-a)^k + o((h-a)^n)$$

On $\forall k \in \mathbb{N}, (e^x)^{(k)} = e^x$

La formule de Taylor-Young appliquée à la fonction exponentielle pour $h=1$ et $a=0$ donne :

$$e^1 = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} (1-0)^k + o((1-0)^n) = u_n + o(1)$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$$

$$2) u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n+1 + 1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \end{aligned}$$

Or, $n \geq 1$ donc $n(n+1)(n+1)! > 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$

et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante, $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ donc les

deux suites sont adjacentes.

3) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et admet pour limite e . Ainsi elle est majorée par e .

Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ étant adjacentes elles ont la même limite donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$

Or $(v_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, elle est donc minorée

par sa limite et on obtient : $\forall n \geq 1, u_n \leq e \leq u_n$

4) On suppose que e est rationnel. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$

On a donc $\forall n$ entier naturel non nul,

$$u_n \leq \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Pour $n \geq q$

$$u_q \leq \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$\text{Donc : } q \cdot q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < p < q \cdot q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{1!}$$

$$\text{On } \forall k \in [0, q] \quad \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N} \text{ donc : } q \cdot q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$$

Ainsi p est strictement compris entre deux entiers consécutifs ^{strictement} ^{qu'ils} ce qui est absurde.

Ainsi e ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ donc

e est irrationnel.

Exercice 2 :

1) $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^∞ par produit et somme de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

On détermine les points en lesquels le gradient s'annule.

On a $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2xy$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 + y + 1$

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ -x^2 + y + 1 \end{pmatrix}$$

On résout : $\begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

* Soit $x = 0$ et alors $y = -1$

* Soit $y = 0$ et alors $x^2 = 1$ donc $x = 1$ ou $x = -1$

On obtient trois points critiques de coordonnées $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

On pose alors $R = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -2y$; $S = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2x$

et $T = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 1$

* Pour le point $(0, -1)$ on a : $S = 0$, $R = 2$ et $T = 1$

d'où $S^2 - RT = -2$

On a $S^2 - RT < 0$ et $R > 0$ f admet un minimum local.

* Pour le point $(1, 0)$ on a : $S = -2$, $R = 0$ et $T = 1$

d'où $S^2 - RT = 4$

On a $S^2 - RT > 0$ il s'agit d'un point selle ou col.

* Pour le point $(-1, 0)$ on a : $S = 2$, $R = 0$ et $T = 1$

d'où $S^2 - RT = 4$

De la même façon, on a ici un point selle ou col.

2) Pour déterminer si f admet en $(0, -1)$ un minimum local ou global on cherche à étudier le signe de $f(x, y) - f(0, -1)$

$$f(x, y) - f(0, -1) = -x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$f(x, y) - f(0, -1) = -x^2 x y + \frac{1}{2} (y+1)^2$$

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATIONOn pour $x=2$ et $y=1$.

$$f(2,1) - f(0,-1) = -4 + \frac{1}{2} \times 4 = -4 + 2 = -2 < 0$$

et pour $x=0$ et $y=0$:

$$f(0,0) - f(0,-1) = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2} > 0$$

$f(x,y) - f(0,-1)$ n'étant pas de signe constant, le
minimum n'est pas global.

3) On résout $f(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y \left(\frac{1}{2} y + 1 - x^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 2x^2 - 2$$

La courbe de niveau est constituée de la réunion
de l'axe des abscisses et de la parabole d'équation

$$y = 2x^2 - 2.$$

Suite exercice 3:

$$\int_0^1 \frac{-x+2}{4(x^2-2x+2)} dx = \left[-\frac{1}{8} \ln(x^2-2x+2) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} \times 2 \arctan(x-1) \right]_0^1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} : \int_0^1 \frac{2^x + 2^y + 2z^3 - 4}{x^5 - 16} dx &= \left[\frac{1}{2} \arctan(x-1) \right] = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{car } \left[\frac{1}{8} \ln(5x-20) + \frac{1}{8} \ln(x-5) - \frac{1}{8} \ln(x^2-7x+2) \right]_0^1 = 0$$

Téléchargement sur
www.devenez-fonctionnaire.fr
 Site d'entraide et de partage
 entièrement GRATUIT