

Merci à bubuls
pour le partage de sa copie pour le site
devenez-fonctionnaire.fr

ÉTIQUETTE
D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat.

Rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel⁽¹⁾
Rayer les mentions inutiles

Pour l'emploi de : Inspecteur des finances publiques

Preuve n° : 2

Matériau : Mathématiques

Date : 2 2 1 1 2 0 2 2

Nombre d'intercalaires supplémentaires : 1

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être
strictement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel
que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute
autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au
stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement.
Toute autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le
jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation
d'un crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à
l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées
dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la
commission de surveillance.

NOTE / 20
13,75

Exercice n° 2:

1) La fonction $(x, y) \mapsto -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 en tant que fonction polynomiale.

Calcul des dérivées partielles de f :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 + y + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 1$$

D'après le théorème de Schwarz comme f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x$$

Recherche de points critiques:

$$\text{On résout } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x^2 = y + 1 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc les points $(0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

Posons: $s = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

On calcule pour chaque points critiques la valeur $s^2 - rt$.

Pour $(0, -1)$: $s^2 - rt = 0 - 2 \times 1 = -2 < 0$

De plus $r > 0$, le point $(0, -1)$ est donc un minimum local.

Pour $(1, 0)$: $s^2 - rt = (-2)^2 - 0 \times 1 = 4 > 0$

Le point $(1, 0)$ est un point col ou selle

Pour $(-1, 0)$: $s^2 - rt = 2^2 - 0 \times 1 = 4 > 0$

Le point $(-1, 0)$ est un point col ou selle.

Exercice n° 3:

1) On effectue la division euclidienne de $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4$ par $x - 1$, pour tout $x \in [0, 1]$.

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 + 2x^3 - 4 \end{array} \bigg| x - 1$$

$$-(x^5 - x^4)$$

$$2x^4 + 2x^3 - 4$$

$$-(2x^4 - 2x^3)$$

$$4x^3 - 4$$

$$-(4x^3 - 4x^2)$$

$$4x^2 - 4$$

$$-(4x^2 - 4x)$$

$$4x - 4$$

0

Donc: $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4 =$

$$(x - 1)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4)$$

Or: $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 4 =$

$$(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

Donc: $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4 = (x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$

$$\begin{aligned}
 \text{De même : } x^8 - 16 &= (x^4)^2 - (2^2)^2 \\
 &= (x^4 - 2^2)(x^4 + 2^2) \\
 &= ((x^2)^2 - 2^2)(x^4 + 4) \\
 &= (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 4)
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} = \frac{(x-1)(x^2+2)(x^2+2x+2)}{(x^2-2)(x^2+2)(x^4+4)}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x^2-2)(x^4+4)} = \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x^6 + 4x^2 - 2x^4 - 8}$$

$$\begin{array}{r}
 x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8 \quad | \quad x^2 + 2x + 2 \\
 -(x^6 + 2x^5 + 2x^4) \quad | \quad x^4 - 2x^3 + 4x - 4 \\
 \hline
 -2x^5 + 4x^2 - 8 \quad | \quad \\
 -(-2x^5 - 4x^4 - 4x^3) \quad | \quad \\
 \hline
 4x^4 + 4x^2 - 4x^3 - 8 \quad | \quad
 \end{array}$$

Question 1)
refaire à la fin de cette feuille

$$\text{D'où : } \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} = \frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$$

$$2) P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^3 + 4 \times \sqrt{2} - 4$$

$$= 4 - 2 \times 2\sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2} - 4 = 0$$

$$P(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^3 - 4 \times \sqrt{2} - 4$$

$$= 4 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4 = 0.$$

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont donc bien racines de P.

3) $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines de P , on peut donc l'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) Q(x)$$

avec $\deg(Q(x)) = 2$

$$\text{Donc : } P(x) = (x^2 - 2) Q(x)$$

$$\text{Posons : } Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 2)Q(x) &= (x^2 - 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 - 2\alpha x^2 - 2\beta x - 2\gamma \\ &= \alpha x^4 + \beta x^3 + [\gamma - 2\alpha]x^2 - 2\beta x - 2\gamma. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = 1, & \gamma - 2\alpha = 0 \\ \beta = -2, & -2\beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\text{Et } Q(x) = x^2 - 2x + 2, \quad \text{avec } \Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0.$$

La factorisation de P sous forme de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[x]$ est donc :

$$P(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 2) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 - 2x + 2)$$

4) On a : $\frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4} \stackrel{\text{d'après 3)}}{=} \frac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} = \frac{(x-1)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2-2x+2)}$

On cherche une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\frac{(x-1)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 2} = \alpha x + \beta + \frac{(x^2 - 2)(\gamma x + \delta)}{x^2 - 2x + 2}$$

On évalue en $\sqrt{2}$: $\frac{1}{2} = 2\alpha + \beta$

On cherche une décomposition de la forme:

$$\frac{\alpha}{(x-\sqrt{2})} + \frac{\beta}{(x+\sqrt{2})} + \frac{\gamma}{x^2-2x+2} = \frac{(x-1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2x+2)} \quad (*)$$

On multiplie l'égalité (*) par $(x-\sqrt{2})$ et on évalue en $\sqrt{2}$: $\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{(2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} = \frac{1}{8}$

On multiplie par $(x+\sqrt{2})$ et on évalue en $-\sqrt{2}$: $\beta = \frac{-\sqrt{2}-1}{(-2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2}+2)} = \frac{-(1+\sqrt{2})}{-8(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{8}$

On évalue (*) en 0: $\frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2})(2)}$

D'aut: $\gamma = \frac{1}{2}$

On multiplie (*) par x et on fait tendre $x \rightarrow +\infty$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

D'aut: $\gamma = -\alpha - \beta = -\frac{1}{4}$

Finalement on trouve:

$$\frac{x-1}{x^4-2x^3+4x-4} = \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} + \frac{-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}}{x^2-2x+2}$$

5) D'après 1) on a:

$$\int_0^1 \frac{x^3+x^2+2x^3-4}{x^4-16} dx \stackrel{1)}{=} \int_0^1 \frac{x-1}{x^4-2x^3+4x-4} dx \stackrel{\text{d'après 4)}}{=} \\ = \int_0^1 \frac{1}{8(x-\sqrt{2})} dx + \int_0^1 \frac{1}{8(x+\sqrt{2})} dx + \int_0^1 \frac{-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}}{x^2-2x+2} dx$$

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{8} \int_{-\sqrt{2}}^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{u} du = \frac{1}{8} \left[\ln(u) \right]_{-\sqrt{2}}^{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \right)$$

on pose $u = x - \sqrt{2}$

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dx}{(x+\sqrt{2})} = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$= -\frac{1}{8} \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_0^1 = -\frac{1}{8} \ln(2)$$

Exercice 3

ne nous pas calculer
ce bœuf, erreur de conf. p.

1) Soit $x \in [0, 1]$.

$$\text{On calcul : } \frac{(x^5 + x^4 + 2x^3 - 4)(x^4 - 2x^3 + 4x - 4) - (x-1)(x^9 - 16)}{Q(x)}$$

$$= \frac{x^9 - 2x^8 + 4x^6 - 4x^5 + x^8 - 2x^7 + 4x^5 - 4x^4 + 2x^7 - 4x^6 + x^4 - 8x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 16x + 16 - [x^9 - 16x - x^9 + 16]}{Q(x)}$$

$$= \frac{0}{Q(x)} = 0. \quad \text{Donc on a bien : } \forall x \in [0, 1]:$$

$$\frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} = \frac{x-1}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}$$

Exercice n° 4 :

1) Posons $u_m = \frac{1}{m!} \quad \forall m \geq 0$.

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

D'après le critère de d'Alembert on en déduit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.

La fonction $x \mapsto e^x$ est développable en série entière sur \mathbb{R} (rayon de convergence infini)

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Par unicité du développement en série entière on en déduit que :

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e$

2) Soit $m \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Donc : $u_{n+1} > u_n$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\frac{1}{(n+1)!}} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

On met tout sur : $(n+1)(n+1)! \cdot n \cdot n! - (n+1)!$

$$= \frac{(n+1)n \cdot n! + n \cdot n! - (n+1)(n+1)!}{(n+1)(n+1)! \cdot n \cdot n!} = \frac{n(n+1)! + n n! - n(n+1)!}{(n+1)(n+1)! \cdot n \cdot n!}$$

$$\begin{aligned}
 (4) &= \frac{mm' - (n+1)!}{(n+1)(n+1)! \cdot mm'} = \frac{mm' - m!(n+1)}{(n+1)(n+1)! \cdot mm'} \\
 &= \frac{-1}{(n+1)(n+1)! \cdot mm'} < 0
 \end{aligned}$$

Donc la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

De plus : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

On a donc : (i) $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante
 (ii) $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante
 (iii) $U_{n+1} - U_n \rightarrow 0$

$(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ sont donc deux suites adjacentes et ont la même limite.

3) On pose $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on fixe
 $A = \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des
 valeurs prises par la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e$ à la question 1).

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante à valeur positive :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n < \sup(A) = e.$$

La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, son premier terme vaut $V_1 = U_1 + \frac{1}{1 \times 1!} = 3 > e$.

Donc : $\forall n \geq 1, \quad U_n < e < V_n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n < e < V_n$

4) On suppose par l'absurde que e est un nombre rationnel.

Donc il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tel que
 $e = p/q$. On aurait donc : $\forall n \geq 1 \quad U_n < p/q < V_n$

Donc : $q_{\text{lim}} < p < q_{\text{lim}} \quad \vee \times q \neq 0$

Donc : $q_{\text{lim}} < p < q_{\text{lim}} + \frac{q}{n \cdot n!}$

Gr : $q_{\text{lim}} + \frac{q}{n \cdot n!} - q_{\text{lim}} = \frac{q}{n \cdot n!}$

$\xleftarrow{\frac{q}{n \cdot n!}} \xrightarrow{\frac{q}{n \cdot n!}}$

q_{lim}

$q_{\text{lim}} + \frac{q}{n \cdot n!}$

Téléchargement sur
www.devenez-fonctionnaire.fr
 site d'entraide et de partage
 entièrement GRATUIT

Exercice n°1:

1) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHC :

$$b^2 = h^2 + AH^2$$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle CHB :

$$a^2 = h^2 + HB^2$$

Dans le triangle rectangle AHC on a:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{b}$$

$$\text{Donc: } a^2 = b^2 - AH^2 + HB^2 \text{ car } h^2 = b^2 - AH^2$$

$$a^2 = b^2 - AH^2 + (c - AH)^2 \text{ car } HB = c - AH$$

$$a^2 = b^2 - AH^2 + c^2 + AH^2 - 2 \times c \times AH$$

$$\text{Donc: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC}) \text{ car } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{b}$$

$$2) \text{ On a: } \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$$

$$\text{Donc: } \sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} \text{ car } \sin(\widehat{BAC}) > 0$$

$\widehat{BAC} \in [0, \pi/2]$.

(rectangle)

$$3) \text{ Dans } AHC \text{ on a: } \sin(\widehat{BAC}) = \frac{h}{b}$$

$$\text{Dans } BHC \text{ rectangle on a: } \sin(\widehat{ABC}) = \frac{h}{a}$$

$$\text{Donc: } \frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{a \times b}{h} = b \times \frac{1}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})}$$