

**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC**

ANNÉE 2009

ÉPREUVE N°2 À OPTION

Durée : 3 heures – Coefficient : 4

**RÉSOLUTION D'UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES
DE MATHÉMATIQUES**

page 2

OU

**RÉSOLUTION D'UN OU PLUSIEURS EXERCICES
DE COMPTABILITÉ PRIVÉE**

page 6

OU

**COMPOSITION SUR UN OU PLUSIEURS SUJETS DONNÉS
ET/OU CAS PRATIQUES D'ÉCONOMIE**

page 15

OU

**COMPOSITION SUR UN OU PLUSIEURS SUJETS DONNÉS
ET/OU CAS PRATIQUES DE DROIT**

page 17

Toute note inférieure à 5/20 est ÉLIMINATOIRE

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des quatre sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PLUS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Les candidats ne peuvent quitter la salle moins d'une heure après le début des épreuves.

L'utilisation de tout document et matériel est interdite.

Tournez la page S.V.P.

RÉSOLUTION D'UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter.

EXERCICE N°1

Pour apprendre à jouer aux cartes, 4 enfants constitués en équipes de 2 joueurs, jouent avec 16 cartes (8 rouges dont 4 carreaux et 4 cœurs, et 8 noires dont 4 trèfles et 4 piques), et disposent chacun de 4 cartes.

Jeanne et Justine jouent contre Téo et Timothée.

Partie A

1 - Quelle est la probabilité pour que Jeanne ait dans ses 4 cartes autant de cartes rouges que de cartes noires ?

2 - Sachant que Téo a dans son jeu 2 cartes rouges et 2 cartes noires, la probabilité pour que Jeanne ait 2 cartes noires et 2 cartes rouges est-elle identique à celle de la question 1 (dans ce cas, le démontrer) ou différente (dans ce cas, indiquer la nouvelle probabilité) ?

3 - Jeanne prend 4 cartes dans un tas qui comprend autant de cartes rouges que de cartes noires.

Quel est le nombre maximal de cartes présentes dans ce tas pour que la probabilité qu'elle pioche 2 cartes de chaque couleur soit supérieure à 50% ?

Partie B

Les cartes rapportent un nombre de points différents : 4 pour les piques, 3 pour les cœurs, 2 pour les carreaux, 1 pour les trèfles.

On ne joue plus qu'avec 8 cartes, dont 2 de chaque catégorie (pique, cœur, carreau et trèfle).
On pioche 2 cartes.

- 1 - Présenter le tableau de probabilité, associé au nombre de points.
- 2 - Quel est le nombre de points moyens obtenus ?
- 3 - Les mêmes gains sont attribués aux quatre catégories, avec une majoration de points lorsque les deux cartes sont de catégorie identique.
Combien de points doit-on rajouter à chaque fois que l'on a deux cartes de même catégorie pour avoir une espérance de gain de 6 points ?

EXERCICE N°2

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unités graphiques : 1 cm en abscisses et 3 cm en ordonnées).

Partie A

- 1 - a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
- 2 - En déduire que (C) admet deux asymptotes. Préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.
- 3 - Déterminer un entier N_0 à partir duquel le réel 1 est une approximation de $f(x)$ à 10^{-3} près par excès.

Partie B

- 1 - Calculer la fonction dérivée de f . En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- 2 - Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0.
- 3 - Démontrer que A est centre de symétrie de (C) .
- 4 - Construire très soigneusement la courbe (C) , ses asymptotes et la tangente (T) dans le plan (P) .

Partie C

Pour tout x appartenant à $] -\infty ; 0]$, on pose $F(x) = \int_x^0 f(t) dt$.

- 1 - Calculer $F(x)$.
- 2 - Interpréter géométriquement le réel $F(x)$. L'illustrer sur le graphique.
- 3 - Montrer que la limite de F en $-\infty$ est $\ln 2$.

EXERCICE N°3

On considère les 2 suites (u_n) et (v_n) , définies pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

- 1 - Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- 2 - Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = v_n - u_n$.
 - a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .
- 3 - Après avoir étudié le sens de la variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on nommera L .
- 4 - On considère à présent la suite (j_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$j_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

- a) Démontrer que la suite (j_n) est constante.
- b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

EXERCICE N°4

Partie A

Une entreprise fabrique et vend des motos miniatures de très haute qualité.

Le coût total de production de " x " motos miniatures (" x " s'exprimant en milliers d'unités) est donné en euros par la fonction P définie par :

$$P(x) = 5x^2 + 15x + 100, \quad x \text{ étant un réel de l'intervalle } [0; 30]$$

Chaque moto miniature est vendue 75€.

1 - Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de "x" motos miniatures est donné par :

$$B(x) = -5x^2 + 60x - 100$$

2 - Déterminer les valeurs de x pour lesquels ce bénéfice est positif.

3 - Quel est le bénéfice maximum de l'entreprise ?

Partie B

Soit $S(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

1 - Vérifier que $S(2) = 0$.

2 - Montrer que $S(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$, où a, b, c sont trois réels à déterminer.

3 - En déduire les solutions de l'équation $S(x) = 0$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin^4 x, x \in \mathbb{R}$.

1 - Sachant que $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$, quelle est la forme générale des primitives de f sur \mathbb{R} ?

2 - Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$.